गणिताच्या अद्भुत जगात

प्रभाकर नानावटी

गणिताच्या अद्भुत जगात

(गणित विषयावरील लेख)

प्रभाकर नानावटी

अनुक्रमणिका

पायथागोरसच्या वाळूवरील रेघोट्या

गणितज्ञांच्या अद्भुत कथा

संदर्भ: Marvels of Math: Fascinating Reads and Awesome Activities by Kendall Haven

गणितातील मूर्त वा अमूर्त संकल्पना, संज्ञा, चिन्हं, इत्यादींच्या बाबतीत विचार करताना या गोष्टी गणितज्ञांना कशा काय सुचल्या असतील, गणितातील चिन्हांना, संज्ञांना जगन्मान्यता कशी मिळाली, यांचा पहिल्यांदा वापर कुणी केला, त्यापूर्वी काय होते, असे अनेक प्रश्न विचारावेसे वाटतात. समीकरणांची मांडणी प्रथम कुणी केली, शून्याची कल्पना कशी सुचली, त्याचा प्रत्यक्षात वापर कसा झाला, कल्पित संख्या म्हणजे काय, ऋण संख्यांना संख्यारेषेवर स्थान कसे मिळाले, इत्यादी प्रश्नांचा भडिमारही या संबंधात करता येईल.

मुळात गणित हे एक exact science असून ती एका प्रकारे भाषासुद्धा आहे, हे आपण विसरता कामा नये. नेहमीच्या भाषेतून एखाद्या वैज्ञानिक संकल्पनेचे वर्णन करून सांगण्यास भरपूर प्रमाणात शब्दांचा वापर करावा लागतो. व शेवटी ती कितपत कळाली असेल हेही लक्षात येत नाही. शिवाय ते वर्णन त्या भाषिकापुरतेच मर्यादित राहील. परंतु गणिताची भाषा वैश्विक असल्यामुळे जगभरातील अभ्यासकापर्यंत ती सहज पोहोचू शकते. अत्यंत कमी शब्द वा चिन्हं वापरून जास्तीत जास्त आशय सांगण्याचा प्रयत्न गणितातून करता येते. त्यासाठी गणितात काही स्वतंत्र मुळाक्षरे व शब्दकोश असून त्याचा वापर केल्यास एकमेकाशी संवाद साधणे सहज शक्य होऊ शकते.

यातील गंमतीचा भाग म्हणजे ही गणिताची भाषा एकट्या - दुकट्याने शोधून काढली नसून त्यासाठी अनेक गणितज्ञांचा हातभार लागलेला आहे.

शिवाय या संकल्पना पिढ्यान पिढ्या उत्क्रांत होत होत या अवस्थेपर्यंत आलेल्या आहेत. त्यामुळे एक कुतूहल म्हणून या कल्पनांचा विकास करणारे कोण होते, त्यासाठी त्यानी काय प्रयत्न केले, त्यांना मिळालेले यश वा अपयश, आलेल्या अडचणी, यांना समजून घेणे रंजक ठरू शकतील. या संबंधात केंडाल हॅवन या गणितज्ञानी लिहिलेले Marvels of Math या पुस्तकातील गणितज्ञांच्या गोष्टी अफलातून आहेत, हे लक्षात आले.

यातील काही कथांचे मराठीकरण करण्याचा हा प्रयत्न असून वाचकांना आवडतील अशी अपेक्षा आहे.

इ.स.पू. पाचव्या शतकाच्या आधीच ग्रीक गणितज्ञांना व तत्ववेत्त्यांना धन पूर्णांक व अपूर्णांकांची पूर्ण कल्पना होती. या दोन्ही प्रकारांना ते परिमेय (rational) संख्या या नावाने ओळखत असत. त्याच वेळी ऋण संख्यांचे अस्तित्व मात्र ते नाकारत होते. कारण शून्याच्या खाली काहीही असणे अशक्यातली गोष्ट आहे यावर त्यांचा दृढ विश्वास होता. त्यांच्या परिमेय संख्यामध्ये या निरर्थक संख्यांना स्थान नव्हते.

***पायथागोरस**(इ.स.पू. 570 – इ.स.पू. 495) या गणितज्ञाने परिमेय संख्यांना फार महत्व दिले होते. या जगाच्या सर्व व्यवहारांचे परिमेय संख्या नियंत्रण करतात असे त्याला वाटत होते. परिमेय संख्यातच या जगाचे रहस्य अडकले आहेत व त्याचा शोध घेणे शक्य आहे याची त्याला खात्री होती. पायथागोरस हा गौतम बुद्ध, कन्फ्युशियस व लावो त्से या महान तत्वज्ञांचा समकालीन होता.*

पायथागोरसचे एक अभ्यास केंद्र होते. या केंद्रात ग्रीक विद्यार्थी गणित विषय शिकून तयार होत होते. त्यातील काहींना परिमेय संख्यांच्याबद्दल आणखी जास्त माहिती मिळते का हे जाणून घ्यावयाचे होते. याच प्रयत्नात असलेल्या दोन विद्यार्थ्यांची ही कथा.

"तूच जाऊन सांग" डायोनिसा आग्रह करत होती.
फिलोक्लीज पांढरी दाढी कुरवाळत व कुरळे केस खाजवत शेजारी उभा होता. पायथागोरसला कसे सांगावे, काय सांगावे याबद्दल तो गोंधळला होता. "पायथागोरसचे काही तरी चुकत आहे, हे मी कसे काय सांगू? गेली 30 वर्षे तो मला शिकवत आहे. मी त्याचा लाडका शिष्य आहे. तूच जाऊन सांग. "

इ.स.पू. 517 सालच्या त्या दिवशीच्या संध्याकाळी मेडिटेरियन समुद्रावरून गार वारे वाहत होते. पायथोगरसचे अभ्यास केंद्र समुद्राकाठच्या क्रोटोन या शहरात होते. दक्षिण इटलीतील उन्हाळ्यापेक्षा येथील हवामान सुखद होते. अभ्यास केंद्रातील विद्यार्थी अभ्यासात मग्न होते. परंतु फिलोक्लीज व डायोनिसाच्या चेहऱ्यावर नाराजी होती. समोरच्या वाळूत त्यांनी काही आकृत्या काढल्या होत्या. कदाचित त्या आकृतीतून काढलेल्या निष्कर्षामुळेच हे दोघेही घामाघूम झाले होते.

फिलोक्लीजच्या पायापाशी 30 वर्षाची डायोनिसा खाली बसून पुन्हा पुन्हा आपण काढलेल्या आकृत्यांकडे निरखून पाहत होती. "कदाचित आपलच काही तरी चुकलं असेल. पायथागोरसने शिकविलेली निगामी तर्क (deductive logic) आपण नीटपणे वापरली नसेल."

जरी ती असे म्हणत असली तरी आपले निष्कर्ष बरोबर आहेत याची तिला पूर्ण खात्री होती. पायथागोरस ज्या प्रकारे निगामी तर्क पद्धतीतून निष्कर्षापर्यंत पोचण्याचे तंत्र शिकवत होता तीच पद्धत तिने येथे तंतोतंत वापरली होती. त्यात काही चूक असण्याची शक्यता नव्हती.

पायथागोरसचा शब्द हा अखेरचा शब्द यावर पायथागोरसने स्थापन केलेल्या ब्रदरहुड या पंथाच्या सदस्यांचा विश्वास होता. या सदस्यांना पायथागोरस हा जणू परमेश्वरच होता. जगातील यच्चावत ज्ञान त्याच्याच

मेंदूतून बाहेर पडलेली आहे यावर त्यांची श्रद्धा होती. त्यामुळे पायथागोरस चूक करू शकतो हे जवळ जवळ अशक्यातली गोष्ट ठरली असती.

परंतु एक यकःश्चित विद्यार्थी त्याच्या तर्कपद्धतीतील दोष दाखवण्याच्या प्रयत्नात होता. व ही चूक तशी लहान वा गौण नव्हती. पायथागोरसने इतके श्रम घेऊन उभे केलेल्या इमारतीच्या पायावरच घाला घालणारी ती ठरली असती. पायथागोरस चूक करू शकतो ही कल्पनाच थरकाप उडविणारी होती. ज्या जमिनीवर आपण इमले वर इमले चढविले ती जमीनच खचून पडणार की काय असे त्यांना वाटू लागले.

मुळात फिलोक्लीज व डायोनिसा आपल्या लाडक्या मास्टरच्या चुका शोधण्याच्या उद्देशाने प्रयत्न करत नव्हते. ते पायथागोरसने अभ्यासाच्या वेळी दिलेल्या गृहपाठांचे उत्तर शोधत होते. आपण कितपत शिकलो आहोत, हेच त्यांना यातून कळले असते. परंतु त्यांना भलतेच काही तरी सापडले होते. समोरील वाळूतील आकृत्या त्याची साक्ष देत होत्या. आणि उघड्या डोळयांना दिसत असलेल्या पुराव्यांना व त्यातून बाहेर पडलेल्या सत्याला ते अव्हेरू शकत नव्हते. पायथागोरसला अभिप्रेत असलेले 1, 2, 3, 4... सारखे पूर्णांक जगातील सर्व गोष्टींचा उलगडा करू शकतील याला तडा जाणार होता. पायथागोरसला केवळ पूर्णांक किंवा अपूर्णांकातूनच जगाचे गुपित शोधता येईल यावर पूर्ण भरवसा होता. God created the numbers हे वाक्य त्याच्या एकूण तर्कपद्धतीला पुरेसे ठरणार होते. फिलोक्लीज वा डायोनिसाला या महान व थोर तत्वज्ञाचे विधान चुकीचे आहे असे वाटण्यातच काही तरी चूक होत असावी. परंतु समोरच्या आकृती काहीतरी वेगळेच सांगत होत्या.

"कुणीतरी यासाठी पुढाकार घ्यायला हवे." डायोनिसा पुटपुटत होती. "ब्रदरहुडच्या संगात्यांना हे कळायलाच हवे. कारण सत्यान्वेषणाचा व्रत त्यांनी घेतला आहे. व कधी ना कधी तरी ही गोष्ट सर्वांना कळणारच."

सामोस (Samos) या ग्रीक बेटावर इ. स. पू.572 साली जन्मलेल्या पायथागोरसने क्रोटोन येथे स्थायिक होण्यापूर्वी जगभरातील बहुतेक अभ्यासकेंद्रांना भेट दिली होती. क्रोटोन येथे त्यानी ग्रीक विद्यार्थ्यांसाठी अभ्यासकेंद्र सुरु केले. त्याचा हा पहिला प्रयत्न अपेक्षेइतका यशस्वी ठरला नाही. विद्यार्थ्यांना शिकवण्यासाठी पदरचे पैसे खर्च करावे लागत होते. परंतु पायथागोरस हा पट्टीचा वक्ता होता. प्रेक्षकांना मंत्रमुग्ध करण्याचे तंत्र त्यानी आत्मसात केले होते. कुठेही न अडखळता विद्वत्तापूर्ण भाषणं तो देत होता. निळया डोळयाचा, उंच, भरदार दाढी असलेल्या पायथागोरसला बघता क्षणीच प्रेक्षकांच्या मनात दरारायुक्त आदर निर्माण होत असे. सार्वजनिक ठिकाणी भाषण देण्यासाठी पडद्यामागून हळू हळू येत सर्वांसमोर उभा राहत होता. त्याच्या डोक्यावरील सोन्याचे कडे प्रेक्षकांचे लक्ष वेधून घेत होते. त्याच्या धीर गंभीर परंतु दूरपर्यंत पोचणाऱ्या खणखणीत आवाजामुळे ऐकणारे मंत्रमुग्ध होत होते. प्रत्येक शब्द न शब्द देववाणीसारखे त्यांना वाटत होते. गणितीय संकल्पनेऐवजी परमेश्वराची आज्ञाच तो उच्चारत आहे, असे ऐकणाऱ्यांना वाटत होते. भाषण देत असताना येरझारा घालत, व अधून मधून आकृती, सरळरेषा, वक्ररेषा, वेगवेगळे आकार मध्येच पसरलेल्या मऊ वाळूवर तो काढत होता. त्याचे काही शिष्य त्यात वेगवेगळे रंग भरून त्यात ठळकपणा आणत होते.

पायथागोरसच्या या शाळेत प्रवेश घेण्यासाठी तेथील श्रीमंत व जमीनदारांच्या मुला-मुलींची रांग लागत होती. परंतु प्रवेश मिळविणे तितके सोपे नव्हते. इच्छुक विद्यार्थ्यांना काही काळ तरी स्टेजच्या पडद्यामागे उभे राहून पायथागोरसचे लेक्चर्स ऐकावे लागत होते. काही वर्षानंतरच्या या उमेदवारीनंतरच पायथागोरसच्या अँफीथिएटर व त्याच्या ब्रदरहूड पंथात प्रवेश

मिळत होते. क्रोटोनमधील या पंथाला काही दिवसातच भरपूर प्रसिद्धी मिळाली. गणितज्ञ व तत्वज्ञ यांची मान्यता मिळाली.

पायथागोरस आपल्या विद्यार्थ्यांना परिमेय संख्याबरोबरच इतर अनेक गोष्टी शिकवत होता. वर्तुळांचे गुणवैशिष्ट्य, संगीतातील स्वरांतील गणितीय संकल्पना, तत्वज्ञान, वैद्यकी, हेही विषय तो शिकवत होता. हिंदू, मेसापेटोमियन व इजिप्शियन तत्वज्ञानाच्या त्याच्या अभ्यासातून संख्यांच्या भोवती कल्पलेल्या दैवी वलयांना तो चांगल्या प्रकारे ओळखत होता. त्याच्या दृष्टीने संख्यांचा अभ्यास म्हणजेच धर्माचा अभ्यास होता. मुळात ग्रीक शब्द mathima चा अर्थच एक प्रकारचा अभ्यास व विशेष करून धर्माचा अभ्यास असा होता. mathimaचा mathematics असे सुधारित नामकरण करून भूमिती व अंकगणित हे विषय तो शिकवत होता.

पायथागोरसच्या मते संख्यामधूनच या विश्वाचा उलगडा होऊ शकतो; संख्यांचे गुणधर्मच विश्वातील व्यवहारांचे वर्णन करू शकतात; विश्वाचे नियंत्रण करू शकतात; विश्वामधील कुठलीही लहान वा मोठी गोष्ट असो, पूर्णांक व संख्यांच्या गुणोत्तरामधून ती व्यक्त करता येते; निसर्ग आणि पूर्णांक व अपूर्णांक यांच्या अभ्यासातून माणूस, निसर्ग व हे जग यांच्यातील संबंध लक्षात येते असा पायथागोरसचा दावा होता.

क्रोटोनमधील सर्व सामान्यांना पायथागोरसवर विश्वास होता. त्याचा शब्द न शब्द झेलण्याची त्यांची तयारी होती. परमेश्वरासमान पायथागोरस चूक करणार नाही, खोटे बोलणार नाही याची त्यांना खात्री होती. मुळात ब्रदरहूडचा ब्रीद वाक्यच संख्या म्हणजे सर्वस्व असा होता!

फिलोक्लीज व डायोनिसा वाळूत काढलेल्या त्या आकृत्याकडे निरखून पहात होते. पूर्णांक संख्या म्हणजेच सर्व काही हे तितकेसे खरे नाही हे पायथागोरसला कोण सांगणार? पूर्णांकच जगाचे वर्णन करू शकतात हे बरोबर

नाही हे कसे सांगणार? कुठल्याही गुणोत्तरामधून वा दशांश अपूर्णांकातून उल्लेख करता येणार नाही अशी संख्या अस्तित्वात आहे हे पायथागोरसला कोण पटवून देणार? पायथागोरसच्या तत्वात न बसणाऱ्या संख्यांचा एक संच आहे व ते अस्तित्वात आहे हे त्याला कसे सांगणार?

"माझ्याकडून हे शक्य नाही." डायोनिसा पुटपुटली. ब्रदरहुडच्या निवडक 230 सदस्यापैकी 30 महिला सदस्य होत्या. त्यापैकी एक असलेली ही डायोनिसा एका श्रीमंत व्यापाऱ्याची मुलगी होती. "मी फक्त गेली पाच वर्षे त्याच्याकडे शिकत आहे. पायथागोरस चुकतो हे मी कशी काय सांगू शकेन?"

फिलोक्लीज पुन्हा एकदा नकार देत "मी कित्येक वर्षापासून त्याच्याकडे शिकत आहे. मी त्याला कसे काय आव्हान देऊ शकतो? अशा प्रकारे आपल्या मास्टरशी उद्धट वर्तन करणाऱ्यांना ब्रदरहूड काय शिक्षा देईल त्याची कल्पनासुद्धा मी करू शकणार नाही....पायथागोरस काय म्हणेल..?" थोडेसे उत्साहित होत "आपण हे काम थीनावर सोपवू या"

थीना ही ग्रीक न्यायाधिशाची हुशार मुलगी. दहा वर्षापूर्वी पायथागोरसशी तिने लग्न केले. निरोप्याकडून तातडीचा निरोप गेला. निरोप मिळाल्या मिळाल्या ती धावतच आली. वाटेत ब्रदरहुडचा आणखी एक सदस्य, हिपासूस, तिला भेटला. तो पण तिच्याबरोबर त्याठिकाणी आला. रेशमीचे उंची वस्त्रे परवडत असूनसुद्धा ब्रदरहुडच्या रीती रिवाजाप्रमाणे अगदी साधे भरडे, सैलसर सुती कपडे तिने घातले होते.

पुन्हा एकदा फिलोक्लीज व डायोनीसा यांनी आकृत्या काढल्या. काटकोन त्रिकोनाच्या आकृतीपासून त्यांनी सुरुवात केली. समीकरणं लिहिली. व निगमन पद्धत वापरून प्रमेय सिद्ध करू लागले. उसासे टाकतच फिलोक्लीज म्हणाला "दोन बाजू सम असलेल्या काटकोन त्रिकोनाच्या कर्णबाजूची लांबी किती आहे याचा शोध घेत असताना आम्हाला कित्येक वेळा $\sqrt{2}$ मिळू

लागले. व याची फोड करताना ती दोन पूर्णांकाच्या गुणोत्तर स्वरूपात मांडता येत नाही हे आमच्या लक्षात आले. ही एक वेगळया प्रकारची संख्या असावी व ही पायथागोरसच्या तत्वात बसत नाही."
"हे कदापि शक्य नाही." थीना जवळ जवळ ओरडलीच. "जर हेच खरे असल्यास ब्रदरहूडवर यापुढे कुणाचाही विश्वास बसणार नाही. काही तरी कुठे तरी चुकत असावे."
"आम्ही गेले तीन दिवस प्रयत्न करत आहोत. यात एकही चूक नाही." डायोनीसा.

थोडासा बुटका व धिप्पाड शरीराचा हिपासूस विचारला, "$\sqrt{2}$ ही संख्या तुम्हाला कुठून मिळाली व मुळात तुम्ही त्याचा अभ्यास का करत होता?"
"पायथागोरसनी शिकविल्याप्रमाणे आम्ही त्रिकोनाकृती काढत होतो. काटकोन त्रिकोनातील दोन बाजूची लांबी एक असल्यास समोरच्या कर्ण रेषेची लांबी $\sqrt{2}$ येणार."
पायथागोरसचा काटकोन त्रिकोनासंबंधीचा हा प्रमेय ब्रदरहुडच्या सर्व सदस्यांच्या माहितीचा होता.
डायोनीस सांगू लागली, "मग आम्ही $\sqrt{2}$ च्या गुणधर्मांचा शोध घेऊ लागलो. परंतु आम्हाला दोन पूर्ण संख्याच्या गुणोत्तरात ते लिहिता आले नाही. हीच आमची अडचण होती. पायथागोरस चूक करू शकत नाही. हेही तितकेच खरे."
थीनाला हे शब्द एखाद्या बाणासारखे टोचत होत्या. एकही शब्द ती उच्चारू शकत नव्हती.
"तू सांगणार का? " फिलोक्लीज
थीना आकृत्यांकडे निरखून बघत होती. शेवटी डोके हलवत "तो माझा नवरा

आहे. मी त्याच्या आयुष्यभराच्या स्वप्नांचा चक्काचूर करणार नाही. मी त्याचे आयुष्य उधळून टाकणार नाही." ती म्हणाली.
" मी सांगेन" हिपासूस म्हणाला " ब्रदरहुड सत्याच्या मागे कायम उभे आहे. जर हे प्रूफ चुकीचे असल्यास पायथागोरसनी ते आम्हाला दाखवावे. नसल्यास ..... "

त्याच दिवशी दुपारच्या नंतर पायथागोरसचे लेक्चर होते. ब्रदरहुडच्या सदस्यांनी अँफीथियेटर तुडुंब भरून टाकले होते. स्टेजवरील वाळूची पाटी व्यवस्थितपणे लावण्यात आली होती. तुतारी वाजली, प्रेक्षक शांत झाले. अंगावरील सैलसर कपडे सावरत व डोक्यावरील सोनेरी मुकुट नीट करत पायथागोरस स्टेजच्या मध्ये येऊन उभा राहीला.
“पूर्णांक व या संख्येचे गुणोत्तर असलेले अपूर्णांक यांना आपण परिमेय संख्या म्हणतो व या विश्वाचे सर्वगुपित या संख्येत आहे..........”

फिलोक्लीज व डायोनीसा दुसऱ्या रांगेत बसले होते. हात चोळत असताना त्यांचा अस्वस्थपणा जाणवत होता. थीना अँफी थियेटर च्या मागे कुठेतरी येरझारा घालत होती. "या संख्यासमूहास Friendly संख्या असेही म्हणतात. त्याचप्रमाणे या संख्यांच्या गटामध्ये Perfect Numbers, Prime Numbers वा धन आणि ऋण संख्यांचासुध्दा समावेश करू शकतो. या प्रत्येक समूहाच्या वैशिष्ट्यातून हे जग समजून घेणे शक्य आहे हे सर्व परिमेय संख्या आहेत."
हिपासूस क्षणार्धात उभा राहिला "पायथागोरस, हे बरोबर नाही. या व्यतिरिक्तही काही संख्या आहेत." इतर सर्व विद्यार्थी हिपासूस कडे रागाने बघू लागले. कुणाचीही हालचाल नाही. सारे कसे स्तब्ध. काळ काही क्षण थिजल्यासारखा!

पायथागोरसला अशा प्रकारे यापूर्वी कुणीही आव्हान दिले नव्हते किंवा अशा प्रकारचा दावाही कुणी केला नव्हता. पायथागोरस स्टेजवर फेऱ्या घालू

लागला. पायाखालची वाळू सरकत होती. दात ओठ खात रागाने तो म्हणाला " हिपासूस, सविस्तरपणे सांग, काही पुरावा ..... ?"

थिएटरमध्ये "मास्टरवर संशय घेणाऱ्यास शिक्षा ... " अशी कुजबुज ऐकू येत होती. गर्दीतून वाट काढत हिपासूस स्टेजवर चढला. काहीजण त्याला मागे ओढण्याच्या प्रयत्नात होते. पायथागोरसने हात वरकरून "सत्य काय व असत्य काय हे गणितच ठरवेल व त्यावरून हिपासूसचे भविष्यही...." असे म्हणत हिपासूसला ओढणाऱ्यांना बाजूला केले.

एक टोकदार काठीने हिपासूसने काटकोन त्रिकोन्नाची आकृती काढली. त्रिकोन्नाच्या दोन्ही बाजूवर 1 हा आकडा लिहिला. " पायथागोरस, या त्रिकोन्नाच्या कर्णबाजूची लांबी किती असेल?"

पायथागोरस एका क्षणाचाही विलंब न लावता " नक्कीच √ 2 असणार."

"अगदी बरोबर √ 2 एक मजेशीर सख्या आहे. थोडेसे थांबून, "यावरून √ 2 ही एक संख्या आहे, हे तुलाही मान्य असावे."

पायथागोरसला क्षणभर काय बोलावे हे सुचेना. हिपासूस पुढे सांगू लागला "ब्रदरहूडचे आपले दोन सदस्य √ 2 चे अपूर्णांकात मांडण्याचा प्रयत्न करत होते. गुणोत्तरातील दोन पूर्ण संख्या कोणते असतील याचा शोध घेत होते. व शेवटी त्याच्या हाती काही लागले नाही."

आपण केलेल्या विधानाच्या पुष्ट्यर्थ असलेले ओळ न ओळ हिपासूस वाचून दाखवत होता. फिलोक्लीज व डायोनिसा यांनी दाखवल्याप्रमाणे √ 2ची उकल काही केल्या होत नव्हती. अर्धे अधिक पाटी वापरूनही फार फरक पडला नाही.

हिपासूसची मांडणी संपली. हातातील काठी बाजूला ठेवून तो तेथेच बाजूला उभा राहिला. " "पायथागोरस, काही तरी चूक आहे का? व जर

काहीही चुकत नसल्यास परिमेय संख्यांच्या व्यतिरिक्तही काही संख्या असू शकतात, याबद्दल तुला काही संशय आहे का ?"

थिएटरमधील अनेकांना हिपासूसचा हा उद्धटपणा सहन झाला नाही. उभे राहून हिपासूसला चिडवू लागले. काही जण स्टेजवर धावून आले. हिपासूसवर दगडांचा मारा होऊ लागला. पुन्हा एकदा पायथागोरसने सर्वांना शांत केला.

पायथागोरस शांतपणे एका बाजूला भरपूर वेळ उभा राहिला. हिपासूसने लिहिलेले अक्षर न अक्षर व ओळ न ओळ वाचण्यात तो दंग झाला. गालावर बोट ठेऊन विचार करू लागला. थिएटर मधील सर्व विद्यार्थी पुतळ्यासारखे बसून होते. मास्टरच्या प्रतिसादाची व त्याच्या पुढच्या आज्ञेची वाट बघत होते. काही क्षणातच पायथागोरस थकलेला व भरपूर म्हातारा झाल्यासारखा वाटू लागला. गंभीर आवाजात तो सांगू लागला. "हिपासूसची मांडणी बरोबर आहे. परिमेय संख्यांच्या व्यतिरिक्तही या जगात इतर प्रकारच्या संख्या आहेत हे मी कबूल करतो." विद्यार्थ्यांच्या कडे नजर फिरवत "एवढी मोठी चूक प्रथमच माझ्या नजरेला आणून दिली. आपली इतक्या दिवसाची समजूत, आपला विश्वास, व आपल्या तत्वज्ञानाला एवढे मोठे आव्हान अजूनपर्यंत कुणीही दिले नव्हते. आपली सत्ता व आपली आजची स्थिती बघता बघता कोलमडून पडू शकेल. ब्रदरहूडच्या बाहेर या गोष्टीचा बभ्रा चुकूनसुद्धा कुठेही होता कामा नये..."

एकही शब्द न उच्चारता पायथागोरस स्टेजच्या पाठिमागे अदृश्य झाला. सुन्नपणे बसलेले विद्यार्थी चुळबुळ करू लागले. इतक्या दिवसांच्या त्यांच्या श्रद्धेवरच घाव घातला गेला. त्यांच्या विश्वासाला तडा गेला.

महिन्याभरात हिपासूसचा मृत्यु जाला. कागदोपत्री त्याच्या मृत्युची नोंद दोन जहाजातील अपघातामुळे झाली असली तरी काहींना मात्र परिमेय संख्यांच्याबद्दल ब्रदरहूडच्या बाहेर बोलल्यामुळे त्याचा खून करण्यात आला

होता. इतरांनासुद्धा मास्टरला अशा प्रकारे आव्हान देणे योग्य नाही असेच वाटत होते.

विश्वाचे रहस्य शोधण्यासाठी व विश्व समजून घेण्यासाठी केवळ संख्यांच्यावर अवलंबून राहता येत नाही, हे प्रथमच तज्ञांच्या लक्षात आले. संख्यांच्यापसून ज्या अपेक्षा केल्या जातात त्या पूर्ण होतीलच याची खात्री देता येत नाही. त्याकाळापर्यंतच्या गणितीय नियमांना धक्का देणारी ही गोष्ट होती. दोन हजार पूर्वीचा हा शोध विश्वाच्या समजुतीला वेगळे वळण देणारा ठरला. संख्यांच्या गुंतागुंतीत अडकून पडलेल्या गणिताची व विश्वरचनेची सुटका झाली व भूमितीला उच्च स्थान मिळू लागले.

ब्रदरहूडला जी घोर आपत्ती असे वाटत होती ते सर्व आज संख्या म्हणून सर्रास वापरात आहेत. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ इ.इ. संख्यांना संख्यारेषेवर मानाचे स्थान मिळाले. व संख्यारेषेचे ते अविभाज्य भाग झाले. या रेषेतील संख्यांना आज वास्तव (real) संख्या असे आपण ओळखतो. व वास्तव संख्यांचे विभाजन परिमेय व अपरिमेय असे केले जाते.

या वास्तव संख्यांच्याबद्दल माहिती करून घेणे हा अजून एका लेखाचा विषय होऊ शकेल!

●●●

आधी भक्कम पाया!

ग्रीक, मेसापेटोमिया, इजिप्त या सारख्या प्राचीन काळच्या नागरी संस्कृतीत शिक्षणावर श्रीमंताची मक्तेदारी होती. मुळात शाळा नसायच्या. असल्या तरी बऱ्याच अंतरावर असायच्या. त्यामुळे शाळा संस्थापक वा शाळेतील शिक्षक जे काही सांगतील तीच पूर्व दिशा ठरायची. प्रत्येक शाळेतील अभ्यासक्रम वेगवेगळा असायचा. शिकविण्याची पद्धत वेगळी असायची. व प्रत्येक शिक्षकाच्या संकल्पना वेगळ्या असायच्या.

इ. स. पू. 310च्या सुमारास इजिप्तमध्ये अलेक्झांड्रिया म्युजियम व ग्रंथालयाची स्थापना झाली. व पुढील काही वर्षातच ती नावारूपाला आली. तत्वज्ञान, कला, खगोल, इतिहास, गणित, भूमिती इत्यादी विषयावरील जगभरातील ग्रंथांची भर पडू लागली. म्युजियम हे जरी नाव असले तरी त्याचा सर्व कारभार एखाद्या नावाजलेल्या विद्यापीठासारखा होता. प्रत्येक विषयातील तज्ञ या ठिकाणी जमत होते. चर्चा होत होती. आफ्रिका, मध्यपूर्व एशिया, भारत येथून अभ्यासक येत होते. नवीन काही तरी शिकत होते. शिकून झाल्यानंतर आपापल्या मायदेशी ज्ञानप्रसाराचे काम करत होते. त्यामुळे शिक्षणाच्या सार्वत्रीकरणाला काही प्रमाणात दिशा मिळू लागली.

इजिप्तचा राजा टॉलेमीने या म्युजियमच्या उभारणीसाठी भरपूर परिश्रम घेतले. म्युजियमच्या गणित विभागाचा प्रमुख म्हणून युक्लिड *या ग्रीक तज्ञाची नियुक्ती त्यानी केली. युक्लिड त्या काळचा अत्यंत हुशार गणितज्ञ व एक आदर्श शिक्षक होता. हिप्पोक्रेटस (Hippocrates), युडोक्सियस, (Eudoxius), अरिस्टेयस (Aristeus), वा प्लॅटो (Plato) या अतिरथी महारथी प्रमाणे युक्लिडने गणितीय ज्ञानात कुठलीही भर घातली नसेल वा नवीन संकल्पनांचा शोधही केला नसेल. मात्र त्यानी गणितीय पद्धतीची*

शास्त्रशुद्धपणे मांडणी करणारा 'एलिमेंट्स' ('Element!')ग्रंथ लिहून गणितीय ज्ञानाला नवीन दिशा दिली.

या ग्रंथामुळे ज्यांना त्याच्या अभ्यासातून समजून घेणे शक्य आहे त्या सर्वांना गणित शास्त्र म्हणजे नेमके काय हे कळू लागले. व मानवी बुद्धीला आव्हानात्मक ठरणारा हा विषय गेली 2000 वर्षे अजूनही त्याच पद्धतीने जगभर शिकविले जात आहे. त्यामुळे युक्लिडला आवडो न आवडो, तो एक महान शिक्षक होता याबद्दल दुमत नसावे.

युक्लिडच्या एलिमेंट् या ग्रंथात मुख्यत्वेकरून सिद्धता (proof), सिद्धांत (theory), गृहितक (axiom), पूर्वानुमान (assumption), आधारतत्व (postulate) व संकल्पना (concept) यांच्यावर भर दिला असून गणिताची वाटचाल युक्लिडच्या या मार्गदर्शिकेमधीनच होत आहे. या संकल्पनेसंबंधीची ही एक काल्पनिक कथा.

इजिप्तच्या वाळवंटावरील गरम वारे नाइल नदीच्या तीरी व दऱ्यातून वाहत असताना आगीच्या भट्टीतून तापून निघाल्यासारखे वाटत होते. तरीसुद्धा जेव्हा हे वारे मेडिटेरियन समुद्राच्या काठी असलेल्या अलेक्झांड्रिया पोचल्यानंतर त्याची तीव्रता कमी झाली आहे, असे वाटत होते. गोदी कामगार जहाजात माल भरत होते. शेजारचा दीपस्तंभ व त्यामागे पसरलेला अफाट शहर स्तब्धपणे बंदरातील व्यवहाराचे निरीक्षण करत आहेत की काय असे वाटत होते.

इ. स. पू. 295 सालचा एप्रिल महिना. अलेक्झांड्रियाच्या बंदरावर कपडे, वाइन, धान्य यांनी भरलेल्या पिपांचे ढीग इतस्तत पसरलेले होते. ग्रीक वास्तुरचनाशास्त्र पद्धतीने बांधलेला टॉलेमीचा राजवाडा बंदराला लागूनच होता. आणि त्याच्या शेजारीच म्युझियम व लायब्ररीची प्रचंड इमारत होती. इमारतीच्या भोवती भरपूर मोठे प्रांगण होते. जगाच्या कानाकोपऱ्यातून तज्ञ

अभ्यासक या ठिकाणी शिकण्यासाठी व शिकवण्यासाठी येथे जमत होते. प्रांगणाच्या मध्यभागी असलेल्या इमारतीत प्रवेश करण्यासाठी लांबवर पसरलेल्या 15 - 20 पायऱ्या चढून जावे लागत असे. आकाशात झेपणाऱ्या दोन खांबामधून लायब्ररीत प्रवेश करताना वास्तूच्या भव्यतेची कल्पना येत असे. हजारोंच्या येण्या-जाण्यामुळे पायऱ्या गुळगुळीत झाल्या होत्या.

डेमिट्रियस फालेरियस (Demitrius Falereus) हा ग्रंथालयाचा प्रमुख होता. त्या दिवशी बंदराच्या दिशेकडे तोंड करून सहाय्यकाची वाट बघत होता. जहाजातून पापिरस (Papyrus)चे भेंडोळे येणार होते. त्याकाळी याच पापिरसच्या कागदावर मजकूर लिहिला जात असे. डेमिट्रियसच्या लायब्ररीत वेगवेगळ्या विषयावरील टीका टिप्पणीचे सुमारे दोन लाख भेंडोळ्या होत्या. व काही दिवसात ही संख्या कित्येक पटीने वाढणार होती. त्याला समोरून त्याचा सहाय्यक येताना दिसला. सहाय्यकाच्या मागे जहाजातील कामगार माल घेऊन ओळीने येत होते.

"सर, यात विवरणपत्रांच्या व इतर गोष्टींचे भेंडोळे आहेत. काही पेंटिंगसुद्धा त्यात आहेत. "

डेमिट्रियस आनंदित झाला. कारण वाटेतच समुद्रात या गोष्टी बुडून जातील की काय अशी त्याला भीती होती. सुखरूप पोहोचल्याबद्दल तो धन्यवाद देत होता.

सहाय्यक " अजून एक आनंदाची बातमी आहे. युक्लिडने आपले पुस्तक लिहून संपवले."

डेमिट्रियस आश्चर्यचकित झाला. " खरोखरच आनंदाची बातमी. पुस्तकाचा विषय कोणता होता?"

"त्याचे शीर्षक आहे The Elements”

“ म्हणजे कुठले Elements कसले Elements? "

क्षणभर सहाय्यक आवाक होऊन त्याच्या तोंडाकडे बघतच उभा राहिला. कामगार मोठमोठे पेट्या घेऊन लायब्ररीत जात होते. सहाय्यकाला युक्लिडचे ते शब्द आठवले. " माझ्या मते गणितातील मूळ सिद्धांताना पुष्टी देणाऱ्या घटकांच्याबद्दलची माहिती या माझ्या The Elements पुस्तकात आहे. या पुस्तकाचे 13 खंड असून सुमारे 450 घटकांचे - वा सिद्धातांचे वर्णन त्यात आहे."

"450 सिद्धांत .... अरे बापरे... सिद्धांत म्हणजे नेमके काय याची संपूर्ण कल्पना या महान गणितज्ञाचे पुस्तक वाचून समजून घेता येईल. "

पुन्हा एकदा सहाय्यक आकाशाकडे बघत युक्लिड नेमके काय म्हणाला हे आठवत होता. युक्लिडच्या मते सिद्धांतात संख्या, समीकरण व रेषा यांची तार्किकरित्या मांडणी करत त्यातील सत्य व त्यांचा एकमेकाशी असलेला संबंध यांचे स्पष्टीकरण असते. डेमिट्रियसला हा काय बडबडतो हेच कळत नव्हते.

"सिद्धांत, समीकरण .... हे ठीक वाटतात. परंतु संख्येत विशेष काय आहे? फक्त वस्तू मोजण्याकरता त्याचा उपयोग होऊ शकतो..... काय कळत नाही...."

"तुम्हीकधी तरी त्याच्या वर्गात बसला आहात का?"

"नाही. मला वेळ मिळत नाही."

"मी कवी असूनसुद्धा तेथे जात असतो. तो एक महान शिक्षक आहे. भूमितीबद्दलची माझी उत्सुकता मी अजूनही विसरू शकत नाही."

"त्यामुळेच टॉलेमीने युक्लिडची नियुक्ती केली असेल. .... जाऊ दे. वाळूत रेघाटलेले वर्तुळ, त्रिकोन, रेषा याबाबतीत माझा वेळ बरबाद करण्यापेक्षा मला इतर कामे भरपूर आहेत. जहाजातून आणखी नवीन काय आले आहेत ते मला बघू दे."

****

23 वर्षे वयाचा थीओक्लीज (Theoclese) शेताच्या जवळ असलेल्या त्याच्या घरात शिरला. या वर्षीचे पीक पेरलेले होते. वीतभर त्या वाढल्याही होत्या. नाइल नदीच्या काठच्या शेती हिरवेगार दिसत होत्या. थीओक्लीज वडिलांना हाक मारत " मला काय करायचे आहे हे तुम्हाला माहित आहे का?" विचारला.

"म्हणजे तू पिकांच्या मधे मधे वाढलेले गवत कापणार की काय?" डेंटिसचा प्रश्न.

"नाही, डॅडी, नाही. मी एक मजेशीर पुस्तक वाचत आहे."

"म्हणजे तू सकाळपासून शेतात काम करण्याऐवजी पुस्तक वाचत बसला होतास की काय?" समोरच्या टेबलावर मूठ आपटत "महत्वाची वेळ वाया घालवण्यासाठी मी तुला शिकवले नव्हते ..". डेंटिसचा राग अनावर झाला होता.

"डॅडी, हे एक फार वेगळया प्रकारचे पुस्तक आहे." थीओक्लीज अजीजीच्या स्वरात वडिलांना विनंती करू लागला. "एलिमेंट्स या पुस्तकात युक्लिडने गणिताविषयी भरपूर काही लिहून ठेवले आहे. भूमितीबद्दलही त्यानी लिहिले आहे. मला अलेक्झांड्रियाला गेलेच पाहिजे. युक्लिडपासून हे सर्व शिकून घेतलेच पाहिजे. ..."

डेंटिसला काय बोलावे हेच सुचेना. स्वत:शी पुटपुटल्यासारखा त्याचा आवाज झाला.

"अलेक्झांड्रिया काही जवळ नाही. जायलाच सात तास लागतील. एवढ्या प्रवासानंतर युक्लिडची भेट व त्याच्याशी बोलणे संपवून येणार कधी व शेतातील कामं आटपणार कधी... काही कळत नाही. ..."

थीओक्लीजच्या आवाजात निर्धार होता.

"नाही, डॅडी. मला अलेक्झांड्रियाला गेलेच पाहिजे. मी पूर्ण वेळ युक्लिडचा विद्यार्थी होणार आहे. शेती जमेल की नाही, हे सांगता येत नाही...."
डेंटिस हळू हळू थीओक्लीजच्या खांद्यावर हात ठेवत "माझा मुलगा गणितज्ञ होणार..." असे क्षीण आवाजात म्हणाला.

***

शुभ्र दाढी कुरवाळत युक्लिड म्युजियमच्या एका प्रशस्त हॉलमध्ये बसला होता. टेबलावर बोटं आपटत असलेल्याचा आवाजही येत होता.
"हे काही बरोबर झाले नाही...." ते स्वत:शी पुटपुटत होता.

त्याच्या समोर अथेन्सच्या एका श्रीमंत व्यापाऱ्याची मुलगी, लिओनारा व तिच्या शेजारी आफ्रिकेतील एक राजपुत्र बसला होता. युक्लिडकडे न बघताच "शहरभर भरपूर अफवा पसरल्या आहेत. नवीन विद्यार्थी गटा-गटाने आलेले आहेत. हे काही बरोबर नाही....” राजपुत्र सांगू लागला.
लिओनारा, "काय बरोबर नाही.. ?"
"सर्वांना असे वाटत आहे की एलिमेंट्समधील सर्व संकल्पनांचा शोध मीच एकट्याने लावला आहे. त्याचे सर्व श्रेय ते मला देऊ पाहत आहेत." युक्लिड,
हे एक महान ग्रंथ आहे यात शंका नसावी. पद्धतशीरपणे तर्कसुसंगत व स्पष्टीकरणासह.... त्यामुळे तुम्हालाच श्रेय द्यायला हवे..." लिओनारा.
"परंतु मी काही यातील सिद्धांताचा वा गृहितकांचा शोध लावला नाही. मी एक साधे सोपे असे एक पाठ्यपुस्तक लिहून काढले आहे. हे मात्र खरे की त्यात मी तर्कशुद्ध व सुसंगत मांडणी केली आहे. तरीसुद्धा....." युक्लिड
"त्यातील काही सिद्धांतांचे प्रूफ तुमचेच आहेत." राजपुत्र म्हणाला, " शिवाय तर्कसुसंगत मांडणी करणे हे लहान काम नाही."
युक्लिड होकार देत म्हणाला, " ते सर्व खरे आहे. परंतु माझ्याही अगोदरचे अनेक महान गणिती आहेत. त्यांचे ऋण लक्षात ठेवायला हवे. हिपोक्रेटस,

थियुडिअस, युडोक्लियस, अरिस्टेअस, प्लॅटो... त्यानी शोधलेल्या या संकल्पना आहेत. या विद्यार्थ्यांनी त्याना श्रेय द्यायला हवे. मी फक्त त्यांची मांडणी केली आहे ."

लिओनारा खिडकीतून बाहेर बघत होती. अँफिथिएटर दिसत होते. येथेच युक्लिड लेक्चर देणार होता. "तुमच्या या लेक्चरची 300 विद्यार्थी उत्सुकतेना वाट बघत आहेत. तुम्हाला श्रेय नको असल्यास प्रथम तुम्ही त्याना पटवून द्या."

युक्लिड टेबलावरील नोट्स गोळा करू लागला.

"मी एक पाठ्यपुस्तक लिहिलेला साधा शिक्षक आहे. " असे म्हणत बाहेर पडला.

****

युक्लिड अँफिथिएटरमध्ये पाय ठेवल्या ठेवल्या संपूर्ण गर्दी उठून उभी राहिली. टाळ्या वाजवून सगळयानी त्याचे स्वागत केले. थिओक्लीज कसाबसा पहिल्या रांगेत पोचला. उभे राहून हातातील The Elementsचे खंड फडकावू लागला. युक्लिडला या गर्दीची मानसिकता बुचकळ्यात टाकत होती.

"हे काही ठीक नाही. मी एक साधा शिक्षक आहे. जे काही श्रेय आहे ते गणिताला द्यायला हवे. मला नाही.:" असे सांगण्याचा तो प्रयत्न करत होता.

परंतु गर्दी असले काही ऐकण्याच्या मनस्थितीत नव्हती. जोरजोराने घोषणा दिल्या जात होत्या. युक्लिड थिएटरच्या कडेला येऊन बोलू लागला. थिएटरमध्ये शांतता पसरली. त्यातील प्रत्येकाला युक्लिडचा शब्द न शब्द ऐकण्याची घाई होती. युक्लिडच्यात अंगभूत असलेल्या तर्कशक्तीला व त्याच्या शहाणपणाला मनापासून ते दाद देत होते.

"गणितात पाच गृहितकं वा पूर्वानुमान असून त्यांना आपण कुठल्याही पुराव्याशिवाय स्वीकारायला हवे. गणितातील तार्किक पद्धतीचे ते पाया आहेत. या गृहितकापैकी मागच्या वेळी तीन गृहितकाबद्दल मी चर्चा केली होती; दोन बिंदूंना जोडून सरळ रेषा काढता येते; ही सरळ रेषा दोन्ही बाजूने पहिजे तेवढी लांब करता येते आणि दोन बिंदू असल्यास त्यातून वर्तुळ काढता येते व त्यापैकी एक वर्तुळाचा मध्यबिंदू व दुसरा वर्तुळाचा परिघावरील बिंदू असेल. "

प्रेक्षागृहात नीरव शांतता होती. युक्लिड काही तरी नवीन रहस्यभेद करत आहे की काय असे वाटत होते. सर्व प्रेक्षक एकाग्र चित्ताने कान टवकारून त्याचे भाषण ऐकू लागले.

"या गृहितकाच्या आधारे सर्व सिद्धांतांना व समस्यांना उत्तरं सापडू लागल्या. आज मी चौथ्या गृहितकाबद्दल चर्चा करणार आहे. या आधारतत्वानुसार सर्व लंबकोन एकमेकाशी समसमान असतात. "

युक्लिड एक क्षणभर थांबला. व प्रेक्षागृहावर नजर फिरवली. खरे पाहता युक्लिडच्या गणिताच्या चर्चेच्या विषयापेक्षा युक्लिडला प्रत्यक्ष बघणे व त्याच्या तोंडावाटे आलेले शब्द न शब्द झेलणे याचेच कौतुक तेथे जमलेल्या विद्यार्थ्यांच्या चेहऱ्यावर ओसंबडून वाहत होते.

"कुणाला तरी मी काय सांगत आहे हे कळत असेल की… "

युक्लिड स्वत:शी पुटपुटला.

"दोन लंब रेषा एकमेकांना छेद दिल्यानंतर तयार होणारे काटकोनं वैशिष्ट्यपूर्ण व अती महत्वाचे कोन आहेत. एकमेकांना छेद दिलेल्या रेषेमुळे चार समान कोन तयार होत असल्यास त्या रेषांना आपण लंबरेषा म्हणू शकतो. यावरून लंबकोन हा संपूर्ण वर्तुळाचा एक चतुर्थांश हिस्सा असतो……. "

भाषण ऐकण्यासाठी गर्दीत अजूनही भर पडत होती……

भाषण संपल्या संपल्या युक्लिड बाहेरच्या दरवाज्याकडे जाऊ लागला. विद्यार्थ्यांनी वाटेतच त्याला गराडा घातला. त्यातील प्रत्येकाला युक्लिडनी पांघरलेली शाल, कपडे, पायातले वहाणं यांना स्पर्श करायचे होते. एका महान गणितज्ञाशी जवळीक साधण्यासाठी ते एकमेकाशी स्पर्धा करत होते. याच गर्दीने थिओक्लीजला युक्लिडच्या समोर उभे केले. घामाघूम झालेला थिओक्लीज हातातील The Elementsचे दोन - तीन खंड संभाळत "तुमच्या पुस्तकाने माझ्या आयुष्याला कलाटणी दिली." असे अडखळत म्हणाला.
"गणित तुझ्या आयुष्याला बदलू दे. माझी ही पुस्तकं इतर महान गणितज्ञांनी मांडलेल्या सिद्धांताचे मार्गदर्शक म्हणून काम करतील."
"नाही. तुमच्या या पुस्तकानेच मला स्फूर्ती दिली. त्यांच्या प्रेरणेमुळे माझे जीवन बदलले. " थिओक्लीजचे आग्रही वक्तव्य.
युक्लिड दरवाज्यातून बाहेर पडताना "मी फक्त शिक्षक आहे.." असे पुटपुटत होता.

****

युक्लिड हा साध्या सरळ शिक्षकाहून फारच वेगळा होता. युक्लिडने भूमितीचे ज्ञान आत्मसात केल्यानंतर त्याच्याच पठडीतील गणितज्ञांच्या भूमितीवरील कार्यांचा बारकाईने अभ्यास केले. प्रथम त्याने या विषयाची मूलतत्वे व काही स्वयंसिद्धे सांगितली. त्यांच्या आधारे प्रमेयांची तर्कशुद्ध मांडणी, पुरावे, व शेवटी निष्कर्ष असे शिस्तबद्ध स्वरूपात सर्व लिहून काढले. व The Elements या नावाने प्रसिद्ध केले. जगप्रसिद्ध झालेला हा भूमितीवरील ग्रंथ आहे. त्यातील तार्किक, अनुक्रमिक व निगमात्मक मांडणीमुळे भूमितीतील अनेक संकल्पनांचा अभ्यास 2300 वर्षानंतरही त्याच पद्धतीने होत आहे. त्यानी मांडलेले पाच आधारतत्वे - विशेष करून पाचवा आधार तत्व (दोन रेषांना छेदणाऱ्या तिसऱ्या रेषेमुळे एका बाजूच्या दोन

कोनांची बेरीज दोन काटकोनापेक्षा कमी असल्यास, त्या रेषा कुठेना कुठे तरी एकमेकांना छेदतात. समांतर रेषांचे आधारतत्व म्हणून हा ओळखला जातो) हा भूमितीचा पाया समजला जातो. व त्यालाच युक्लिडियन भूमिती म्हणून ओळखतात.

बायबलचा अपवाद वगळता युक्लिडच्या The Elementsचाच सर्वात जास्त अभ्यास, वापर, उजळणी झाली असेल. मुद्रण यंत्राचा शोध (1482) लागल्यानंतरच्या गेल्या 500 वर्षात त्याच्या हजारो आवृत्त्या छापल्या असतील. त्यापूर्वी लाखो लोकांनी हस्तप्रती तयार करून अभ्यास केला असेल. गेली 2000 वर्षे या पुस्तकानी गणित जगावर साम्राज्य केले.

तरीसुद्धा या ग्रीक शिक्षकांच्या कृतीतून आधुनिक जगाला खरोखरच फायदा झाला की नाही हाही चर्चेचा विषय होऊ शकतो.

●●●

शून्यातून विश्व

इ.स. 10 व्या शतकापर्यंत शून्य ही एक संख्या असू शकते याचा विचारही कुणी केला नव्हता. ग्रीक तज्ज्ञांनी नाही; अरिस्टॉटल, युक्लिड, अर्किमिडिस, पायथागोरस यांच्यापैकी कुणीही नाही. रोमन्सनासुद्धा हा विचार शिवला नव्हता. भारतीयांच्याही हे लक्षात आले नव्हते. या सर्वांना गणिताचा परिचय होता. परंतु संख्यांच्या स्वरूपाविषयी ते अनभिज्ञ होते. त्याकाळी कदाचित रोजच्या व्यवहारात गणिताला स्थान नसेल. ग्रीक व रोमन्स यांच्या मते ऋण (negative) संख्या असूच शकत नाही. रिक्तपणाच्या खाली काही असू शकत नाही याची पुरेपूर खात्री त्यांना होती. त्यामुळे शून्य *या संख्येची त्यांना कधीच गरज भासली नाही.*

6 व्या शतकात दक्षिण भारतातील गणितज्ज्ञांनी शून्य ही संकल्पना मांडलेली असली तरी त्यांच्या दृष्टीने शून्याला स्वतंत्र अस्तित्व नव्हते. दशमान पद्धतीत एखादी संख्या लिहिताना जेथे अंक नसेल तेथे अभावसूचक म्हणून शून्य या संज्ञाचा वापर होत असे. 4+6 = 10 यात 1 दशम स्थानी व 0 एकम स्थानी दाखवले जात होते. यातून एकमस्थानी काहीही नाही हे दर्शविणाऱ्या एखाद्या संज्ञेची गरज होती व ती गरज भारतीय गणितज्ज्ञांनी शून्य या संज्ञाद्वारे भरून काढली. अरब तज्ज्ञांनी हीच दशमान पद्धत वापरून गणिताचा विकास केला. या शून्य संज्ञेला ते सिफर म्हणू लागले.

नंतरची सुमारे 400 वर्ष शून्याचा वापर फक्त अभावसूचक म्हणूनच होत असे. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार भागाकार यात त्याचा वापर नव्हता. शून्य, धन की ऋण, याचेही उत्तर त्यांच्यापाशी नव्हते. संख्यामधील रिक्त स्थान भरणारी संज्ञा एवढेच स्वरूप त्याचे होते. 2003 व 2030 या संख्यांना वेगळी दर्शविणारी ती पद्धत होती. अन्यथा या दोन्ही संख्या कदाचित 23 किंवा आणखी काही तरी लांबलचक पद्धत वापरून लिहावी लागली असती.

8 व्या शतकात भारतीय संख्यापद्धत अरब जगात पोचली. अल् ख्वारिझ्मी (इ.स. 780 – इ.स. 850) या गणितज्ञाने सिफरला संख्या पद्धतीत सामावून घेतले. नवीनच उदयास आलेल्या बीजगणितातील समीकरणांसाठी याची नितांत गरज आहे हे त्यानी ओळखले.

इंग्रजीतील अल् जिब्रा हा शब्दच अरेबिक भाषेमधील अल् जिब्र या शब्दावरून घेतला होता. अल् जिब्र याचा अर्थ कमी करणे, वा उत्तर शोधणे. याच काळात अमेरिकेतील माया संस्कृतीनेसुद्धा अरबाप्रमाणे शून्याला संख्या पद्धतीत स्थान दिले. परंतु माया संस्कृती अस्तंगत झाली व अरब संस्कृती वृद्धींगत होत गेली.

शून्याला संख्या पद्धतीत स्थान असून संख्या रेषेवर शून्याचा समावेश झाल्यास अनेक प्रश्न सुटतील याची ही एक कथा.

****

बगदाद शहरात रोजच्या प्रमाणे व्यवहार चालू होते. वाळवंटातील हिरवळ असलेले हे शहर मोठे व्यापारी केंद्र होते. केशराचा, मसाले सामांनाचा, रेशमी वस्त्रांचा व्यापार होत असल्यामुळे वातावरण वेगवेगळ्या वासानी दरवळत होते. बाजार उंटाच्या डेऱ्यानी घेरलेला होता. बाजारापासून थोड्याशाच अंतरावर दूरपर्यंत खजूरांची झाडं पसरली होती. बगदाद शहराला ही झाडं शोभा देत होत्या. टायग्रस नदीच्या काठच्या या शहराच्या पलिकडे तळपणारा सूर्य, लांब पसरलेले वाळवंट व जोराचा वारा यामुळे शहरात प्रवेश करण्यापूर्वी प्रवासी पूर्णपणे थकून जात असत. बाहेरचा हा थकवा शहरात शिरल्या शिरल्या कुठेतरी नाहिसा होऊन अंगात तरतरी येत होती. कापडी पडद्यांने बंद केलेल्या घरांनी वेढलेल्या लहान लहान बोळा-बोळातून फिरताना व मध्यभागी असलेल्या मोकळ्या मैदानातील बाजारात प्रवेश करताना आपण एका वेगळ्या जगात प्रवेश करत आहोत की काय असे वाटत होते. रेशमी वस्त्र

विकणारे, पुस्तकांची खरेदी-विक्री करणारे, परदेशी चलन वटवणारे, जडी-बुटी विकणारे, आहार धान्याचे व्यापारी, मसाले सामांनाचे व्यापारी, इत्यादीमुळे गजबजलेल्या या बाजारात काही वेळा पाय ठेवायलाही जागा मिळत नव्हती. बाजारभर पसरलेल्या या विविध वासातून सुटका नाही असे वाटत होते. मातीची बैठी घरं व दुकानं, बुरखा घातलेल्या बायकांचा गट व त्यांची कुजबूज, हसणं खिदळणं, आडोश्याला उभारून चाललेल्या गप्पा, यामुळे बाजारातून बाहेर पडणे नकोसे वाटत होते. याच बाजारात कित्येकांचे दैव उजळून निघत होते व कित्येंकांच्यावर दुर्दैव कोसळत होते !

इ.स. 800 चा काळ होता. वाळवंटी प्रदेशात पावसाळा, हिवाळा व उन्हाळा याच्यांत फरक जाणवत नसला तरी बगदाद शहर त्यावेळी वसंतागमनाने न्हाऊन निघत होता, खजूराच्या झाडावर पिकलेले खजूर लटकले होते. चारी बाजूने मौजमजेची, आंनदाची चाहूल जाणवत होती. बाजाराच्या समोरच्याच एका छोट्या डोंगरावर बगदादच्या खलिफाचा राजवाडा होता. दिवसाचे 24 तास व वर्षाचे 365 दिवस थंडगार ठेवण्याची अंतर्गत व्यवस्था राजवाड्यात होती, याच राजवाड्यात आज एक मोठी चर्चा होणार होती. या चर्चेसाठी मुहम्मद इब्न मुल्ला उर्फ **अल् ख्वारिझ्मी** येणार होता. चाळीस वर्षाच्या या ख्वारिझ्मीचे दाढीचे व डोक्यावरच्या केसात कुठे तरी पांढरे केस नुकतेच दिसू लागले होते. अरब जगातील एक अत्यंत प्रसिध्द गणितज्ञ तो होता. भारतातील आर्यभट्टानंतर त्या काळचा महान गणिती अशी त्याची ख्याती होती.

चर्चेत भाग घेणारी दुसरी व्यक्ती म्हणजे खुद्द खलिफा **अल् मामून** होता. लांबवर पसरलेल्या वाळवंटी प्रदेशाचा तो राजा होता. व बगदाद ही त्याच्या राज्याची राजधानी होती. गेली वीस वर्षे तो राज्य करत होता. त्यानी आपल्या राजवाड्याला House of Wisdom असे नाव ठेवले होते. त्यामुळे जगाच्या

कानाकोपऱ्यातून अनेक अभ्यासक या शहराला भेटी देत होते. खलिफाशी चर्चा करत होते. खलीफाच्या दरबारात चर्चेसाठी कुठलाही विषय वर्ज्य नव्हता.

आजच्या चर्चेत भाग घेणाऱ्यातील तिसरी व्यक्ती अहंमद बिन अझीझ होती. हाही त्या काळातील एक मोठा गणितज्ञ होता. अगदी बारीक अंगकाठीच्या या अहंमदकडे पाहिल्यानंतर हा भरपूर भुकेला असावा असेच लोकांचा ग्रह होत होता. बटबटीत डोळे असलेल्या अहंमदची चालसुध्दा झोकांड्या खाल्यासारखी वाटत होती.या तिघामधील आजचा चर्चेचा विषय होता सिफर. सिफर म्हणजे रिक्त जागा वा आपल्या समजूतीप्रमाणे शून्य.

ख्वारिझ्मीकडे बोट दाखवत खलीफ तावातावाने बोलत होता.
"पंधरा वर्षापूर्वी तू जेव्हा **भारतीय संख्या पद्धत** येथे घेऊन आलास व त्यांच्या श्रेष्ठत्वाविषयी तू मला सांगू लागलास तेव्हा आम्ही सर्व त्या संख्या आनंदाने स्वीकारल्या. आमच्या प्रमाणे संपूर्ण अरब जगताने त्याचे स्वागत केले. परंतु त्या वेळी सिफर म्हणजे दशांश पद्धतीतील अभाव सुचवणारी एक प्रतीक एवढेच तू सांगत होतास. वास्तव संख्येत (real numbers) एखादी जागा रिकामी असल्यास ती भरून काढण्यासाठी सिफरचा वापर होतो हे तुझे म्हणणे आम्हाला त्यावेळी पूर्ण पटले होते. त्यामुळे या सिफरला काही किमंत नाही असे वाटत होते."
अहमंद खलिफाच्या प्रत्येक वाक्यागणिक डोके हलवत होता. " खाविंद, तुमचे म्हणणे पूर्णपणे बरोबर आहे." ख्वारिझमी सांगू लागला, "परंतु मी जेव्हा त्याचा खोलात जाऊन अभ्यास करू लागलो तेव्हा सिफर केवळ अभावसूचक नसून त्याच्यापेक्षा जास्त काही तरी आहे हे माझ्या लक्षात आले."
"जास्त म्हणजे..." खलिफा

"आणखी जास्त .... " अहंमदची पुस्ती "इतर संख्येप्रमाणे सिफर हीसुद्धा एक संख्या आहे. व त्याला संख्येचा दर्जा दिल्यास अंकगणित व बीजगणित यातील अनेक समस्यांना उत्तर मिळू शकेल, अशी माझी खात्री झाली आहे."
"परंतु शून्य ही संख्या होऊ शकत नाही." अहंमद तावातावाने वाद घालू लागला. "संख्यात जेथे अंक नाही ते स्थान भरून काढण्यासाठी केलेली ती एक सोय आहे. त्यापेक्षा त्याला जास्त किंमत द्यायची गरज नाही. संख्या म्हणून त्याचा वापर करण्याची गरज नाही."

खलिफा दाढी कुरवाळत "अहंमदच्या विधानात सत्य आहे. सिफरला संख्यांचा दर्जा देणे योग्य ठरणार नाही. संख्यांच्यापेक्षा सिफर अत्यंत वेगळे आहे. परंतु आता एकदम ती संख्या कशी काय होऊ शकते?"

"आपण सिफरला संख्येचा दर्जा द्यायला हवी.'' ख्वारिझ्मी निश्चयी स्वरात म्हणाला. ''आपण तिघानी मिळून हे काम न केल्यास गणित पुढे जाऊच शकणार नाही. अल्लाची मेहरबानी हवी असल्यास ...."
" हे कसे काय शक्य आहे? जे मुळातच अस्तित्वात नाही त्यातून नवीन काही तरी कसे काय काढू शकतो?" इती अहंमद.
"सिफरला संख्या न मानल्यामुळे गणितात प्रगती का होऊ शकणार नाही? " खलिफाचा प्रश्न.
"अहंमद, तुझा प्रश्न अगदी साधा आहे." ख्वारिझ्मी सांगू लागला. "इतर संख्यांना जे नियम लागू होत असतात तेच नियम सिफरलाही लागू केल्यास सिफरसुद्धा संख्या होऊ शकेल. जंहापनाह, तुमच्या प्रश्नाचे उत्तर जरा कठिण आहे." अल् ख्वारिझ्मी येरझारा घालत घालत खजुराच्या भांड्यातील एक खजूर घेतला. " संख्या मोजण्यासाठी आपल्याला सिफरची गरज नाही. ग्रीक व रोमन्स सिफर माहित नसतानासुद्धा संख्या मोजतच होते. त्यांना कधी अडचण आली नाही. संख्यांची बेरीज व गुणाकार यातील रिक्त स्थान

दाखवण्याची पद्धत भारतीय गणितज्ञांनी अंमलात आणली. सिफरचा वापर कसा करावा हे आपण त्यांच्याकडून शिकलो. वजाबाकी व भागाकार यांची गोष्टच वेगळी. 8 मधून 8 वजा केल्यास काय शिल्लक राहील? "
"काही नाही." अहंमदचे उत्तर.

चूक, 8 मधून 8 वजा केल्यास सिफर शिल्लक राहते. यात पुन्हा 7 जमा झाल्यास काय उत्तर येईल?"
" सात" खलिफाचे उत्तर

" खाविंद मला हेच म्हणायचे आहे." ख्वारिझ्मी उत्तेजित स्वरात सांगू लागला. "सिफर जर संख्या नसती तर त्यात 7 जमा करताच आल्या नसत्या. सिफर संख्या नसल्यास तुम्ही तसे करू शकणार नाही. कारण संख्येतच संख्येची बेरीज होऊ शकते. गुणाकार होऊ शकतो. 8-8 चे उत्तर संख्या नसल्यास त्यात 7 ची बेरीज करताच आली नसती. त्यामुळे 0 ही संख्या असलीच पाहिजे. अन्यथा वजाबाकी अशक्य! "

अहंमदचा अस्वस्थपणा जाणवू लागला. त्याचे डोळे विस्फारले. ओठावर जीभ फिरू लागली. खलिफा डोळे मिटून स्वस्थ बसला. त्याला काही सुचतच नव्हते. उत्तर देण्याच्या स्थितीत तो नव्हता.
"अरे यार, मला तुझे हे म्हणणे नक्कीच पटते. तू महान गणितज्ञ आहेस याबद्दल माझ्या मनात बिलकुल संशय नाही. परंतु सिफरच्या बाबतीत माझा एक प्रश्न आहे. कुठलिही संख्या एक तर धन असते किंवा ऋण असते. सिफर या दोन्हीपैकी कुठलीही नाही. तरी आपण तिला संख्या का म्हणावे?"
"हुजूर, तुम्ही बरोबर ओळखलात. सिफर ही एकच अशी संख्या आहे की त्याला आपण धन किंवा ऋण ही संज्ञा त्याच्याशी जोडू शकत नाही. या दोन्ही प्रकारच्या संख्यांना balance करणारी व संख्यारेषेच्या मध्यभागी असणारी अशी ही संख्या आहे. धनसंख्यांची, समीकरणांची वा आलेखांची (graphs)

सुरुवातच या संख्येतून होते. अनंतापर्यंत जाणारे धन संख्या संच व ऋण संख्या संच यांना सिफर जोडून ठेवते. "
अहंमद फळयावरील काही संख्या पुसून काढत " तू जे काही सांगत आहेस ते अंशत: खरे असू शकेल. सिफर हे आकडे मोजण्यासाठी नक्कीच उपयोगी पडू शकते याबद्दल दुमत नाही. संख्यांच्या बाबतीतील काही प्रश्नांची उत्तरं ही संख्या देऊ शकते हेही मान्य. उदाहरणार्थ, जेथे काहीही नसल्यास तेथे किती आहेत या प्रश्नाचे उत्तर सिफर होऊ शकेल. बेरीज - वजाबाकीबद्दलचे तुझे हे प्रयत्न नक्कीच प्रशंसनीय आहेत. परंतु संख्यांचा वापर गुणाकार व भागाकारासाठीसुद्धा व्हायला हवा." असे म्हणत त्यानी फळयावर काही आकडे काढले व तो म्हणाला " तुझे सिफर हे करू शकत नाही हे तुला मान्य असायला हवे. "
खलिफाचे लक्ष ख्वारिझ्मी काय उत्तर देतो याकडे होते.
" भागाकारासंबंधी मी विशेष प्रयत्न केले आहेत व त्यासाठी भरपूर वेळही घालवला आहे. परंतु आपण प्रथम गुणाकारापासून सुरुवात करू या. ते तुलनेने सोपे आहे." अल् ख्वारिझ्मीने कमरेला बांधलेल्या पिशवीमधून मूठभर नाणी बाहेर काढून ठेवत " मी तुला याच्यातील एक नाणं देतो " असे म्हणत अहंमदच्या समोर एक नाणे ठेवला. " याला 4 ने गुणिल्यास किती नाणी होतील?"
" 4 " अहंमदचे उत्तर.
" म्हणजे मी तुला एकेक नाण्याचे चार वाटे द्यायला हवेत. मी तुला आता 2 नाणी देतो. व त्याचे 4 पट म्हणजे किती नाणी?"
" 8, ख्वारिझ्मी, हे सर्व आपण अंकगणितात शिकलेलो आहोत. याचा या सिफरशी काय संबंध? " अहंमदचा प्रतीप्रश्न.

अल् ख्वारिझ्मी त्याला गप्प बसण्याची खूण करत " तुझं 8 उत्तर बरोबर आहे. यासाठी मला दोन दोन नाण्याचे 4 वाटे द्यायला हवेत. "

ख्वारिझ्मी अहंमदच्या हातातील दोन्ही नाणी परत घेतो. "आता मी तुला सिफर नाणे दिलेले आहेत. आणि सिफरला तू जर 4 ने गुणिल्यास मला सिफरचे 4 वाटे द्यावे लागतील. बरोबर?"

अहंमदचे डोळे गरागरा फिरू लागले. " तू सिफरचा गुणाकार करू शकत नाही. ते अशक्य आहे. " अहंमद.

चूक, मित्रा, मी तुला अगोदर सांगितल्याप्रमाणे चार वाटे देतो. फक्त त्यात एकही नाणं नसणार. "

खलिफा डोळे विस्फारत म्हणाला. "म्हणजे तुझ्या मते शून्याशी गुणाकार केल्यास उत्तर शून्यच येणार. परंतु दुसऱ्या कुठल्याही संख्येला 4 ने गुणिल्यास उत्तर म्हणून तीच संख्या कधीच येणार नाही."

"बरोबर आहे हुजूर, सिफर ही एक अजब, मजेशीर व एकमेव अशी संख्या आहे. तरीसुद्धा आपण त्यापासून दूर जाऊ नये व त्याची भीती बाळगू नये. गणितातील इतर नियम सिफरलाही लागू करावे."

"मग 0 x 0 याचे उत्तर काय असेल? " अहंमदचा खोडकर प्रश्न.

अहंमदकडे एक नजर टाकत "नाण्याचा एकही वाटा नाही व त्या वाट्यात एकही नाणं नाही. असे असल्यास त्याचे उत्तर सिफरच असणार."

"गंमतीशीर आहे. भागाकाराचे काय?" खलिफा

अल् ख्वारिझ्मीला हा कठिण प्रश्न अपेक्षितच होता. " हुजूर, शून्याने भागाकार हे समजून घेण्यासाठी थोडेसे कष्ट घ्यावे लागतील. तरीसुद्धा मी प्रयत्न करतो. 100 नाण्यामधून एकेक नाण्याचा वाटा करायचे असल्यास 100 वाट्या होतील. 10 वाटे केल्यास प्रत्येक वाट्यात 10 नाणी असतील. कमी वाट्या म्हणजे वाट्यातील नाण्यांची संख्या जास्त."

त्यांना आपण जे काही सांगत आहे ते कळले की नाही यासाठी खलिफा व अहमदकडे नजर टाकून तो पुढे सांगू लागला. "वाट्याची संख्या कमी केल्यास वाट्यात जास्त नाणी बसणार. मी भाजक (diviser) जितका लहान लहान करत जाईन त्याच प्रमाणात भागाकाराचे उत्तर मोठे मोठे होत जाणार. भाजक 1 असल्यास उत्तर 100 ला पोचले. मी आणखी कमी करत करत सिफर पर्यंत आणल्यास उत्तर आणखी मोठे मोठे होत जाईल."

"मोठे म्हणजे किती मोठे?" अस्वस्थ खलिफाचा प्रश्न, खलिफाच्या या अस्वस्थेमुळे चवरीने घालणाऱ्या नोकरांची तारांबळ उडत होती.

"खाविंद, आपण प्रथम अपूर्णांकाचे बघू या. अपूर्णांकाने भागाकार करता येते हे आपल्याला माहित आहे. 100 ला 1/2 ने भागाकार करणे म्हणजे 2 ने गुणाकार केल्यासारखे. व त्याचे उत्तर 200 येईल. जर 1/10 ने भागाकार केल्यास उत्तर 1000 येईल. 1/1000 ने भागिल्यास उत्तर 100000 येईल. परंतु सिफर यापेक्षा कित्येक पटीने लहान आहे. त्यामुळे सिफरने भागिल्यास उत्तर फारच मोठा असणार."

"मोठा म्हणजे किती मोठा.... " खलिफा "हुजूर, माफ करा, मी जरा जास्तच वेळ घेत आहे. याचे उत्तर शोधण्यासाठी मी शेवटी आलेखांचा वापर केला. वाटा इतका लहान होत गेला की नंतर त्यात काही शिल्लक राहिले नाही. त्याचवेळी संख्या वाढत वाढत अनंतापर्यंत (infinity) पोचली. परंतु इन्फिनिटी ही संख्या नाही हे आपल्याला माहित आहे. त्यामुळे सिफरने भागिल्यास उत्तर इन्फिनिटी येणार हे मात्र नक्की. "

"याचाच अर्थ सिफर काही कामाचा नाही, हे तुला मान्य असायला हवे." अहंमद तिरकसपणे म्हणाला.

"तरीही सिफर ही एक संख्या होऊ शकते. काऱण जरी याच्या भागाकारातून एक निर्दिष्ट उत्तर येत नसले तरी सिफरने भागाकार करणे शक्य आहे, हे मान्य

करायला हवे. सिफर संख्या नसती तर भागाकाराचा प्रश्नच उपस्थित झाला नसता."

अहंमदच्या पदरी निराशा. खलिफा दाढी खाजवत विचार करू लागला. तितक्यात एक नोकर खलिफासाठी निरोप घेऊन आला. आणि त्याच्या कानात कुजबुजला. अल् मामूम खलिफा उभा राहिला. "मला आता जायला हवे. या नवीन संख्याचे फार छान समर्थन केलस. तू जेव्हा भारतीय अंक पद्धती घेवून आलास तेव्हा मला तेवढे महत्व कळले नव्हते. परंतु माझ्या अपेक्षेपेक्षा किती तरी पटीत त्या पद्धतीचे मूल्य आहे हे आता कळू लागले. बीजगणित व अंकगणित यांना या सिफरच्या अभावसूचकतेमुळे वेगळी कलाटणी मिळाली. तरीसुद्धा मी अजूनही सिफरला संख्या म्हणण्यास धजत नाही. याची आपण उद्या चर्चा करू या." असे म्हणत सर्व उपस्थितांचे निरोप घेत लवाजम्यासह तो बाहेर पडला.

****

दुसऱ्या दिवशीची दुपारची वेळ होती. नेहमीप्रमाणे दरबार भरला. सिंहासनावर खलिफा व खालच्या मऊ गालिच्यावर मांडी घालून अहंमद व ख्वारिझ्मी बसले.

“मी तुला आज दोन प्रश्न विचारणार आहे. तुझे उत्तर बरोबर असल्यास तुझ्या या सिफरला संख्येचा दर्जा देऊन टाकू.”

“तुझ्या म्हणण्याप्रमाणे कुठल्याही संख्येला शून्याने भागिल्यास उत्तर म्हणून अती प्रचंड संख्या येते व त्याची व्याख्या करता येत नाही. हे बरोबर आहे ना? आता तू मला सांग, शून्याने शून्याचा भागाकार करता येते का ? व करता येत असल्यास त्याचे उत्तर काय असू शकेल?"

हा प्रश्न ऐकून अहंमद गालातल्या गालात हसत होता. मात्र ख्वारिझ्मी क्षणाचाही विलंब न लावता सांगू लागला. "हुजूर, ज्या भागाकाराचा आपण

उल्लेख करत आहात ती एक भागाकारामधील अपवादात्मक बाब आहे. अस्तित्वातच नसलेल्या वस्तूंचे वाटे करून ठेवता येत नाही व विशेषकरून त्यात काहीही नसताना. ही एक असाधारण स्थिती आहे. व अव्याख्यात व अनिश्चित अशी ही बाब आहे."

" याचाच अर्थ सिफर ही संख्या नाही का?" अहंमदचा प्रतीप्रश्न.

"याचा अर्थ गणिताविषयीचे आपले अज्ञान असे म्हणता येईल. व हे अज्ञानच विशिष्ट बाब समजून घेण्यातील मुख्य अडथळा आहे."

"म्हणजे सिफर ही संख्या आहेच!" खलिफा

" शंभर टक्के!" ख्वारिझ्मी. खलिफा म्हणाला " ठीक आहे. आता माझा दुसरा प्रश्न. अरिस्टॉटल यानी घातांकाची कल्पना मांडली. त्यामुळे त्याच त्याच संख्येचा अनेक वेळा गुणाकार लिहिणे सोपे झाले.. उदा,

$4x4 = 4^2$;

$4x4x4 = 4^3$. यावरून 4^0 वा सामान्यपणे X^0याचे उत्तर काय असू शकेल?"

" खाविंद, फार सुरेख प्रश्न!" अहंमदची टिप्पणी.

" मला माहित आहे." खलिफाची प्रतिक्रिया. "याचे उत्तर काय?"

अल् ख्वारिझ्मी उत्तर देऊ लागला " x^3 याचे गुणक x^2, x किंवा x, x, x (यात x तीनदा) असे असतील. x^2 चे गुणक x, x (यात x दोनदा) येतील त्याचप्रमाणे x^1मध्ये x एकदाच येईल. बीजगणिताच्या प्राथमिक नियमानुसार......"

"ते मला कळले. म्हणजे x^0 यामध्ये x ही नसणार व 0 ही नसणार."

"तसे नव्हे हुजूर, कारण x^1 म्हणजे x^0 गुणिले x. असणार. जर x^0 याचे उत्तर 0 असल्यास x^1 ही शून्य झाले असते. कारण 0 गुणिले 0 ही शून्यच झाली असती. परंतु तशी स्थिती नाही. हुजूर, x^1 म्हणजे x च असणार. त्यामुळे x^0 ची किंमत 1 असणार."

"काय...!" अहंमद जवळ जवळ ओरडला.

खलिफा मात्र गालातल्या गालात हसत होता. "ख्वारिझ्मी, फारच छान. तू पुन्हा एकदा बाजी मारलीस. मित्रा, फार सुंदर मांडणी. तू चांगल्या प्रकारे शून्याचे समर्थन करू शकलास. सिफरची गणना संख्यामध्ये होत राहणार. व केवळ अभावसूचक म्हणून नव्हे. आपली संख्या रेषा ऋण इन्फिनिटीपासून धन इन्फिनिटीपर्यंत जात असल्या तरी त्याच्या मधोमध शून्य असणार."

****

अरबस्तानच्या त्या उन्हाळ्यातील या एका आविष्कारामुळे बीजगणित, कॅल्क्युलस, भूमिती, या विषयांना कलाटणी मिळाली. शिवाय अभियांत्रिकी, विज्ञान इत्यादींच्या वापरातील गणित शाखा समृद्ध झाल्या. संख्यारेषेवर शून्याचे अस्तित्व नसते तर आपण एवढे प्रगती करू शकलो नसतो.

तरीसुद्धा पुढील 500 वर्षे या शून्याचे अस्तित्व नाकारण्यात आले. त्याच्या कारणाचा शोध हा एक वेगळा लेख होऊ शकेल!

●●●

कल्पित संख्यांचे अभूतपूर्व जग!

इ.स. पू. 3000 सालीसुद्धा बॅबिलोनियन्सना क्लिष्ट व गुंतागुंतीच्या गणितातील पदावलींचा परिचय होता व त्यांची उत्तरं शोधून काढण्याची पद्धतीही त्यांना माहित होत्या. त्यानंतरच्या अनेक नागरी संस्कृतींनी गणिताच्या ज्ञानात भर घातली. व त्या अनुषंगाने गणिताचा विकास होत गेला. परंतु इ.स. 6व्या शतकापासून 16व्या शतकापर्यंत गणिताच्या ज्ञानात कुठलीही भर पडली नाही वा प्रगती झाली नाही. गणिताला मृतावस्था आली होती. कारण गणितात अनेक अनुत्तरित प्रश्न होते व काही पदावलींना उत्तरच सापडत नव्हते. गणितज्ञांसमोर एखादी अदृष्य भिंत उभी आहे की काय अशी परिस्थिती होती.

उत्तर न सापडलेल्या पदावलीत तीन घातांक असलेली समीकरणं प्रामुख्याने होत्या. या प्रकारच्या x^3 असलेल्या समीकरणांना क्युबिक्स म्हणून ओळखले जाते. अशा प्रकारचे समीकरणं गुतागुंतीच्या होत्या. x ची किंमत काढता येत नव्हती. 6व्या शतकातील अल् काशी या अरब गणितज्ञाने क्युबिक्समधील x चे अदमासे मूल्य काढून दाखवले. परंतु याचे कुणालाही समाधान झाले नाही. समीकरणाचे योग्य उत्तर मिळत नव्हते. अनेक देशातील गणितज्ञ प्रयत्न करत करतच मरूनसुद्धा गेले.

14 ते 16 व्या शतकात या समस्येला गती मिळाली. अशा समीकरणांना उत्तरं मिळण्याची अंधुकशी आशा निर्माण झाली. परंतु या प्रयत्नातील बहुतेकांना गणिताच्या उत्तरापेक्षा आपल्यालाच सर्व श्रेय मिळावे अशी तीव्र इच्छा होती. गणितापेक्षा क्रेडिटच्या मागेच अनेक जण होते व त्यातून अनेक नाट्यमय प्रसंग घडत गेले. अशाच एका घटनेचा हा मागोवा.

1525च्या सुमारास शिपियोन डेल् फेरो (Scipione del Ferro) हा गणितज्ञ वृद्धत्वाकडे झुकला होता. इटलीतील बोलोना (Bologna)

विद्यापीठात गेली कित्येक वर्षे तो गणित विषय शिकवत होता. व बोलोना विद्यापीठावर त्याचे अतिशय प्रेम होते. हे विद्यापीठ संपूर्ण जगातील गणित विषयाच्या अभ्यासाचे एकमेव केंद्र व्हावे अशी इच्छा तो मनातून बाळगून होता. विद्यापीठाच्या मैदानात फिरत फिरत तेथील इमारती, उद्यानं, गट करून चर्चा करणारे विद्यार्थी यांचा तो आस्वाद घेत होता.

उन्हाळयाच्या शेवटी शेवटी एके दिवशी त्याने त्याच्या एका लाडक्या शिष्याला भेटण्यास निरोप पाठवला. त्याचा लाडका शिष्य अंटोनिओ फीओर (Antonio Feior) हा बोलोना शहरातील एका श्रीमंत घराण्यातील मुलगा होता. त्याच्या मोठ्या भावाला सर्व गडगंज संपत्ती मिळणार होती कारण अंटोनिओनी स्वतःचे आयुष्य विद्यापीठात शिकवण्यात घालण्याचा निर्धार केला होता.

अंटोनिओ खोलीत आल्या आल्या शिपिओन यांनी आतून दरवाज्याला कडी घातली व एका गुप्त दरवाज्याला बाजूला सरकवून त्यातील एक पेटी बाहेर काढून ठेवली. त्यातील काही कागदं बाहेर काढून अंटोनिओच्या हातात देत यांना तोंडपाठ कर म्हणून सागितले.

त्या कागदावरील मजकूर वाचता वाचताच अंटोनिओला आश्चर्याचे धक्के बसू लागले.

"तू क्युबिक समीकरणांची उत्तरं शोधून काढलीस ! ...." अंटोनिओ जवळ जवळ ओरडला. अंटोनिओच्या हातातील कागद थरथरत होता. त्यावर $x^3+mx = n$ या प्रकारचे समीकरण लिहिलेले होते. आणि m व n या संख्या होत्या. अंटोनिओला खरोखरच धक्का बसला होता.

गेली हजार वर्षे प्रत्येक गणितज्ञ अशा 3 वा जास्त घातांक असलेल्या समीकरणांना उत्तर शोधून दाखविण्याचे स्वप्न बाळगून होता. अजूनपर्यंत यात

कुणालाही यश मिळाल नव्हते. परंतु आज त्याच्यासमोर उभ्या असलेल्या गुरूने चक्क क्युबिक समीकरणाची फोड केली होती!

"जे कुणालाही जमले नाही ते करून दाखवू शकलास! सगळया जगाला हे कळले पाहिजे!" अंटोनिओचा कौतुकमिश्रित आवाज.

शिपिओनचे सुरकुतलेले हात अजूनही कापत होते.

"अंटोनिओ, आताच नको. हे फक्त एकाच प्रकारच्या समीकरणाचे सोल्युशन आहे. आपल्याला इतर अनेक स्वरूपातील समीकरणांच्या उत्तरांचा शोध घ्यायचा आहे. शिवाय एकदा प्रसिद्धी मिळाली की संपूर्ण जगाला ही रीत कळेल. जोपर्यंत प्रसिद्धी मिळत नाही तोपर्यंत ही बोलोना विद्यापीठाची संपत्ती म्हणून राहील. माझ्या पश्चात तू हे काम गुप्तपणे कर. आणि सर्व प्रकारच्या समीकरणांना उत्तरं शोधून काढ. त्यामुळे या विद्यापीठाचे नावलौकिक होईल, अमाप प्रसिद्धी मिळेल ".

अंटोनिओसमोर दुसरा मार्ग नव्हता. व तो संशोधन करत राहिला.

पुढील 10 वर्षाच्या काल खंडात ब्रेसिया येथील निकोलो (Nicolo of Brescia) या गणितज्ञाने $x^3+mx^2= n$ या स्वरूपातील समीकरणाचे उत्तर शोधल्याचे दावा केला. परंतु इतर समकालीन गणितज्ञ त्याची हेटाळणी करत त्याच्याकडे दुर्लक्ष केले.

निकोलो मुळातच रस्त्यावर वाढलेला एक अनाथ मुलगा होता. वयाच्या आठव्या वर्षी तो इटालियन विरुद्ध फ्रेंच युद्धाच्या धुमश्चक्रीत सापडला. फ्रेंच सैनिकानी त्याच्या चेहऱ्यावर ठिकठिकाणी वार करून तो मेला या समजुतीने निघून गेले. परंतु निकोलो जिवंत होता.

तोंडावर मोठी जखम झाल्यामुळे त्याला आयुष्यभर अडखळत बोलावे लागले. त्यामुळे त्याला तोतरा (Tartaglia - टार्टाग्लिया) म्हणूनच सर्व जण हिणवत होते, ओळखत होते. टार्टाग्लिया फक्त तीन दिवस शाळेच्या वर्गात

शिकला. कारण त्याच्या आईला तेवढेच परवडले. त्या तीन दिवसाच्या शिक्षणाचा निकोलो यानी भरपूर फायदा करून घेतला. अक्षर ओळख झाली. आकडे मोजता आले. चोरलेल्या पाच पुस्तकांच्या सहाय्याने तो वाचू लागला, लिहू लागला.

चेहऱ्यावर कायमची दाढीचे खुंट, अंगावर फाटके तुटके कपडे, डोक्यावर ठिकठिकाणी डाग पडलेली घाण टोपी, अशा अवतारातील 34 वर्षाचा टार्टाग्लिया गणिताचे खाजगी क्लासेस घेत कसेतरी पोट भरून घेत होता. क्युबिक समीकरणाचे जे गणित गेली हजार वर्षे सुटलेले नाही त्या गणिताचे उत्तर हा फाटका माणूस शोधून काढतो यावर कुणीही विश्वास ठेवायला तयार नव्हते. अपवाद फक्त अंटोनिओ फिओरचा होता. अंटोनिओ त्याच्यावर फार चिडला. खरे पाहता याचे श्रेय अंटोनिओला हवे होते. क्युबिक समीकरणाचे उत्तर गेली दहा वर्ष त्यानी जपून ठेवले होते. आता कुठला तरी भिकार माणूस त्याचे श्रेय लाटण्याचा प्रयत्न करत होता. हे त्याला सहन झाले नाही. या श्रेयावर त्याचा हक्क होता. त्यातून त्याला थोरामोठ्यांच्यात मान सन्मान मिळणार होते. इतिहासाच्या पानात त्याचे नाव कोरले गेले असते. परंतु आता या सर्वावर पाणी पडले.

टार्टाग्लियाच्या दाव्यातील फोलपणा उघड करण्यासाठी अंटोनिओनी त्याला जाहीर आव्हान दिले. दिवस ठरवण्याता आला. फिओर व टार्टाग्लिया यांच्या समीकरणातील स्वरूपामुळे त्यांच्या उत्तरात फरक असणार होता. एकाचे स्वरूप $x^3+mx = n$ तर दुसऱ्याचे $x^3+mx^2= n$ असे होते. अजूनही या समीकरणाचे अनेक स्वरूप होते. उदाः $x^3= n$ $x^3+mx^2+ nx = p$ इ.इ.

अंटोनिओकडे उत्तर नसल्यास तो अशा प्रकारे जाहीर आव्हान करण्याच्या भानगडीत पडणार नाही याची टार्टाग्लियाला खात्री होती. जर टार्टाग्लियाला स्पर्धा जिंकायची असल्यास दोन्हीचीही उत्तरं त्याला माहित असणे गरजेचे

होते. त्यासाठी तो बोलोना विद्यापीठाच्या आवारातील एखाद्या अप्रामाणिक परंतु गरजू विद्यार्थ्याला शोधण्यासाठी प्रयत्न करणे गरजेचे वाटले. त्याच्या प्रयत्नाला यश मिळाले. तसा एक विद्यार्थी सापडला. त्यानी फिओरची उत्तरं चोरून आणली.

दोन्ही प्रकारच्या समीकरणांची उत्तर टार्टाग्लियाला माहित असल्यामुळे तो अंटोनिओला सहजपणे हरवू शकला. अंटोनिओची जाहीर नाचक्की झाली. त्याला विद्यापीठातून काढून टाकण्यात आले.

x^2 असलेल्या द्विघातांकाच्या समीकरणात सामान्यपणे x च्या दोन किंमती असतात. त्यावरून x^3 असलेल्या समीकरणात x च्या 3 वा x^4 मध्ये चार... असे तर्क त्याकाळचे गणितज्ञ करत होते.

फिओर आणि टार्टाग्लियो यांनी क्युबिक समीकरणासाठी शोधलेली उत्तरं आणि ती स्पर्धा आपापसातल्या होत्या. परंतु यात काही तरी वेगळे आहे, आश्चर्यजनक आहे याची जाणीवच तेथे जमलेल्या प्रेक्षकांना आली नाही. ही एक सामान्य घटना असाच लोकांचा ग्रह झाला. खरे पाहता या नंतरच्या प्रसंगांच्या साखळीची ही फक्त नांदी होती!

****

गिरोलामो कार्डानो (Girolamo Cardano) हा एक प्राध्यापक. त्याला गणित विषयात रुची होती. हा प्राध्यापक-गणितज्ञ, फिओर व टार्टाग्लियो यांच्यातील स्पर्धेचा बारकाईने मागोवा घेत होता. फिओर वा टार्टाग्लियो यानी क्युबिक समीकरणाबद्दलचे शोध निबंध कुठेही प्रसिद्ध केले नव्हते हे त्याच्या लक्षात आले. व याच गोष्टीचा फायदा घेण्याचे त्यानी ठरवले. आपले घोडे दामटण्याची संधी त्याला आयते मिळाली. गणितज्ञांच्या इतिहासात कार्डानो हा एक अत्यंत हुशार परंतु कपटी, कारस्थानी गणितज्ञ म्हणून ओळखला जातो. उंच परंतु हडकुळा, कारुण्यपूर्ण डोळे, रुंद कपाळ, उभट चेहरा व त्यावर

त्याची अणचुकीदार दाढी इत्यादीमुळे तो चारचौघात उठून दिसत होता. बाजूने बघितल्यास त्याचे डोके चंद्रचकोरासारखे दिसत होते.

मिलानो विद्यापीठातील या प्राध्यापकाने टार्टाग्लियोला भेटण्यासाठी आमंत्रण दिले. मिलानो विद्यापीठातील प्राध्यापक पद स्वीकारण्यापूर्वी त्याला कित्येक युरोपियन विद्यापीठातून डच्चू मिळाला होता. टार्टाग्लियोला मिलानो विद्यापीठात नोकरी देण्याचे आमिष त्यानी दाखविले. टार्टाग्लियो पोचल्यानंतरच्या रात्री त्यानी एक पार्टी दिली. रात्रीच्या पार्टीच्या वेळी भरपूर दारू पाजल्यानंतर टार्टाग्लियो नशेत बरळू लागला. क्युबिक समीकरणातील सर्व बारकावे त्यानी सांगितले. टार्टाग्लियोला कळू न देता समीकरणासंबंधीची सर्व माहिती काढून घेण्याची कार्डानोची युक्ती सफल झाली.

1540 साली कार्डानो याविषयीचा शोधनिबंध सादर केला. त्यात त्यानी टार्टाग्लियो वा फिओर यांचा साधा उल्लेखही केला नव्हता. क्युबिक समीकरणांची रीत व algorithm स्वतःच शोधून काढल्याचा दावा त्यानी केला होता. शोधनिबंध प्रसिद्ध झाल्यावर टार्टाग्लियोला (आणि फिओरलासुद्धा!) भरपूर राग आला. हे दोघेही कार्डानोनी आपली रीत चोरली आहे असे आरोप ठेऊन कोर्टात जाण्याची धमकी देऊ लागले. कार्डानो यांच्या धमकीला वा आरोपांना भीक न घालता उलट फिओर व टार्टाग्लियो यानीच - याविषयी त्यांच्याबरोबर चर्चा केल्यामुळे - चोरी केली आहे, असा प्रत्यारोप केला.

आरोप, प्रत्यारोप, दावे, प्रतिदावे, आव्हानं, यांच्यामुळे तो काळ गाजत होता. कार्डानोचा एक गुंड विद्यार्थी, लोडोव्हिको फेरारी त्याच्या शोधनिबंधाच्या मदतीला आला. त्याच्या धमकीवजा 'चर्चे'ला घाबरून फिओर यानी खटला मागे घेतला. टार्टाग्लियो मात्र खटला रेटण्याच्या प्रयत्नात

होता. परंतु मिलानोच्या एका अरुंद गल्लीत फेरारीकडून त्याला भरपूर मार खावा लागला. पुन्हा एकदा त्याच्या चेहऱ्यावरचे हाड मोडले.

****

या सगळया गदारोळात, इटलीतील अजून एक गणितज्ञ, रॅफेल बोम्बिली (Rafael Bombelli) यानी, या तिघांच्या क्युबिक समीकरणांच्या रीतींचा अभ्यास केला, त्याचे विश्लेषण केले. व त्यावरून काही निष्कर्ष काढले. बोम्बिली मुळातच खुशालचेंडू होता. कुठल्याही विषयाला गंभीरपणाने न घेणारा, जॉली माणूस होता. दाढीच्या आत दडलेल्या चेहऱ्यावर कायम स्मित हास्य उमटत होते. बोम्बिलीच्या मते गणितज्ञांना स्वतःच्या नावे श्रेय उपटण्याच्या हव्यासामुळे क्युबिक समीकरण सोडवण्यासाठी वेळ लागत होता. बोम्बिलीने मात्र समीकरण सोडविण्यासाठी एक अफलातली कल्पना लढवली व संख्यामध्ये एका नवीन प्रकारच्या संख्यासंचाला जन्म दिला.

क्युबिक समीकरणाचे उत्तर शोधताना संख्याचे वर्गमूळ काढणे हेही अभिप्रेत असते. परंतु ती संख्या ऋण संख्या असल्यास - उदा (-2) असल्यास - काय करावे, हा एक मोठा प्रश्न होता. फिओर, टार्टाग्लियो व कार्डानो हे गणितज्ञ अशा प्रकारच्या उत्तराकडे दुर्लक्ष करत होते. धन वा ऋण संख्या असो, त्या संख्येला त्याच संख्येनी गुणिल्यास उत्तर धन संख्या येणार हे माहित होते. (+1गुणिले+1 = +1; -1 गुणिले -1 = +1) त्यामुळे ऋणसंख्येचे वर्गमूळ काढता येत नाही याची खात्री त्यांना होती. क्युबिक समीकरणात x ची 3 मूल्यं असण्याबद्दलही शंका नव्हती. हा एक न सुटणारा पेच होता. त्यामुळे क्युबिक समीकरण सोडविणे अशक्यातली गोष्ट आहे असेच वाटत आले होते. बोम्बिलीने मात्र यासाठी नवीन शक्कल लढविली. त्यानी एका वेगळ्या प्रकारच्या संख्याचा संच वापरून उत्तराची मांडणी केली.

गंमत म्हणजे बोम्बिलीच्या या संख्या संख्यारेषेवर बसणाऱ्या नव्हत्या ऋण अनंत ते धन अनंतापर्यंत पसरलेल्या संख्यामध्ये बोम्बिलीच्या संख्या नव्हत्या. तरीसुद्धा त्या संख्या अस्तित्वात आहेत अशी कल्पना करून बोम्बिलीने उत्तर शोधले व त्यांना कल्पित संख्या (imaginary numbers) म्हणून नावही दिले. कारण त्याच्या या संख्या संख्यारेषेचे भाग नव्हते. व त्याच्यासाठी i (√-1) हे चिन्ह त्यानी प्रदान केले. i वरून हा वेगळा संच आहे हे ओळखता येऊ लागले. उदाः +1 ही धन संख्या -1 ही ऋण संख्या 1i ही धन कल्पित संख्या व -1i ऋण कल्पित संख्या.

मुळात कल्पित संख्या म्हणजे नेमके काय? जे ज्या संख्यांच्या गुणाकारांमुळे उत्तर ऋण संख्या असते, त्या संख्या कल्पित संख्या असतात. उदाः 3i x 4i = -12 . ऋण संख्येचा वर्गमूळ नेहमीच कल्पित संख्येत येतो. (√-4 = 2 i) एखाद्या संख्येत वास्तव व कल्पित अश्या दोन्ही संख्या असतात तेव्हा त्या संख्येला संमिश्र संख्या (complex number) असे म्हटले जाते. उदा: (12 + 10 i)

****

कल्पित संख्येशी संबंधित असलेल्या गणितज्ञांचा शेवट कसा झाला?

अंटोनिओ फिओरचा शेवटचा काळ अज्ञातवासातच गेला. आपल्या भावाच्या घरी आश्रित म्हणून राहून तेथेच त्यानी शेवटचा श्वास सोडला. टार्टाग्लियो पुन्हा एकदा लबाडी, फसवणूक यांच्यातून उदर निर्वाह करू लागला व त्याचा शेवट एखाद्या भिकाऱ्याप्रमाणे झाला. गिरोलामो कार्डानो यानी गणित विषयावर भरपूर पुस्तक लिहिली. त्यामुळे त्याला गणितज्ञ म्हणून सन्मानित केले. अजूनही तो क्युबिक समीकरणांचा संशोधक म्हणून ओळखला जातो, हे विशेष. परंतु काही कारणामुळे त्याला तुरुंगात डांबून

ठेवले व शेवटची कित्येक वर्षे तो जेलमध्येच होता. रॅफेल बोम्बिली एक समाधानी जीवन जगून वयाच्या 82व्या वर्षी मरण पावला.

महत्वाचे म्हणजे बोम्बिलीच्या प्रयत्नातून एका नवीन संख्या संचाचा शोध लागला. बोम्बिलीच्या या कल्पित संख्यांच्या संचामुळे आधुनिक विज्ञान व अभियांत्रिकीतील गुंतागुंतीच्या गणितांना उत्तरं मिळू लागली. समुद्राच्या तळाशी जेव्हा काँक्रीटचे खांब रोवले जातात तेव्हा याच कल्पित संख्यांच्या जोरावर त्यांची रचना केलेली असते. सागरी वादळातूसुद्धा हे 'पिलर्स' पडू नयेत यासाठीची पूर्ण खबरदारी घेत असताना कल्पित संख्याच मदतीला येतात. आकाशयानांच्या उड्डाणांच्या गणितातसुद्धा कल्पित संख्यांचा योगदान असतो. महानगरातील गगनचुंबी इमारतींच्या रचना याच संख्येवर विसंबून आहेत.

या संख्यांचा वापर कसा होत असतो हा एक वेगळाच विषय असू शकेल!

●●●

माशी ग माशी, कुठे ग जाशी

रेने देकार्त (Rene Descartes) (1596 - 1650) हा फ्रेंच अभ्यासक मुळात तत्वचिंतक होता. "मला वाटते, म्हणून मी आहे" (I think, therefore I am) असे विधान करणाऱ्या या तत्वज्ञानी तत्वज्ञानाव्यतिरिक्त जीवशास्त्र, भौतिकी, विश्वरचनाशास्त्र, व गणित या अभ्यासक्षेत्रातही अभूतपूर्व योगदान दिले आहे. देकार्त यानी आखून दिलेल्या संशोधन पद्धतीचाच 18व्या शतकातील युरोपमधील संशोधक अवलंबन करत होते. देकार्त यानीच अंकगणितातील बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार साठी +, -, x व ÷ या संज्ञाना रूढ केले. अजूनही जगभर अंकगणितासाठी याच चिन्हांचा वापर होत आहे.

त्यानी दिलेल्या योगदानांपैकी गणितातील भूमिती व बीजगणितांचे एकत्रीकरण हे सर्वात महत्वाचे योगदान ठरेल. त्याकाळी भूमिती व बीजगणित हे एकमेकाशी संबंध नसलेले व अत्यंत वेगवेगळे क्षेत्र असे समजले जात होते. 17व्या शतकापर्यंत समीकरणांना आलेखाद्वारे मांडण्याची रीत माहित नव्हती. भूमितीतील काही तुरळक अपवाद वगळता वर्तुळ, चौकोन, सारख्या नियमित आकारांना समीकरणातून मांडता येते याची कल्पना नव्हती. रेने देकार्त यानी यांची सांधेजोड केली व हा गणितातील एक महत्वाचा टप्पा समजला जातो.

या एकत्रीकरण झालेल्या अभ्यासक्षेत्राला विश्लेषक भूमिती (analytic geometry)या नावाने आता ओळखले जाते. आलेखातील सहनिर्देशक अक्षांचा वापर करून त्यावरील बिंदूंचे नेमकेपणाने सूचित करण्याची कल्पना सर्व प्रथम रेने देकार्तला सुचली. गंमत म्हणजे ही कल्पना तो खोलीत उडत असलेल्या गांधिल माशीच्या निरीक्षणातून सुचली होती. त्याचीच ही एक काल्पनिक कथा.

17व्या शतकात संपूर्ण युरोप म्हणजे एक रणांगण होते. ठिकठिकाणी युद्धजन्य परिस्थिती होती. वर्षानुवर्षे लढत राहिलेल्या या लढायामुळे युरोपमधील जनजीवन विस्कळित झाले होते. 1619च्या हिवाळयात प्रिन्स ऑफ ऑरेंजचे सैन्य तळ ठोकून हिमवर्षाव थांबण्याची वाट बघत होती. रस्ते खराब झाले होते. रस्त्याच्या कडेला सैनिकांसाठी तंबू ठोकलेले होते. व महिनोन महिने येथेच तळ ठोकल्यामुळे ते कायमस्वरूपी आहेत असे वाटत होते. त्यांच्या भोवतीच सैन्यातील अधिकाऱ्यांच्यासाठी इमारतीत व्यवस्था केली होती.

त्या दिवशी कर्नल गास्पर घाईघाईने तेथे आला.

"सार्जंट, कॅप्टन देकार्त उठला आहे की नाही, बघ"

"सर, मला नाही वाटत ते उठले असतील. आताशीच अकरा वाजत आहेत." ड्यूटीवरील सार्जंट युनीफॉर्म सावरत व सॅल्यूट करत कर्नलला सांगत होता. परंतु कर्नल हार मानणाऱ्यापैकी नव्हता. त्रासिक चेहऱ्यानेच "येथील सर्व सैनिक सकाळच्या सहा वाजायच्या आधी परेड ग्राउंडवर हजर असतात.... " कर्नल पुटपुटत होता.

"परंतु कॅप्टन देकार्त कधीच लवकर उठत नाहीत. सर. ते लहानपणी आजारी होते. व झोप हा त्यावरचा उपाय झाला आहे."

"तो इतका चांगला अधिकारी नसता तर...." स्वतःशीच पुटपुटत "मला त्याची खोली दाखव, मला त्याच्याशी बोलायचे आहे." अशी ऑर्डर त्यानी दिली. सार्जंट काही करू शकत नव्हता. दरवाजा ढकलून कर्नल गास्पर देकार्तच्या खोलीत शिरला. एक हात डोक्याखाली ठेऊन वरच्या छताकडे बघत देकार्त झोपला होता. कर्नल आत आला तरी तो स्वतःच्या तंद्रीतून बाहेर पडायला तयार नव्हता. तो काही उठला नाही, सलाम ठोकला नाही. व यात काही आश्चर्य वाटण्यासारखे नाही हेही कर्नलला पक्के ठाऊक होते. देकार्त हसतच

"वेलकम कर्नल, सकाळी सकाळी मला एक गमतीशीर स्वप्न पडले होते. " असे सांगू लागला.
"आज दुपारी सर्व ऑफिसर्सची एक तातडीची बैठक आहे." कर्नल गास्पर.
"आज... आज दुपारी?" देकार्त बिछान्यातून उठत उठत विचारत होता.
24 वर्षाचा हा अधिकारी दिसायलाही हडकुळा होता. मात्र त्याच्या चेहऱ्यावर नाक उठून दिसत होते. डोळे कायमचे प्रश्नार्थक... “आज दुपारी.....? “
"हो, आजच." कर्नल दरवाज्याकडे जाता जाता "मीटिंगला उशीर करायचे नाही..." .
"परंतु, कर्नल, ..." देकार्तचा विनवणीचा सूर. कुरळे केस खांद्यावर रुळत होते. " सर, मला पडलेल्या स्वप्नाबद्दल तुम्हाला सागायचे होते. .... स्वर्गातून आलेला संदेश... "
"काय बरळतोस... कसला संदेश... कसला स्वर्ग..."
"मला खात्री आहे. स्वप्नात कुठून तरी लांबून आवाज येत होता. चर्च व शाळेच्या मधल्या फटीतून जोर जोराने सोसाट्याचा वारा वाहत होता. कदाचित ही वादळाची पूर्व सूचना असावी. सगळीकडे लोकांची धावपळ होती. आरडाओरडा, गोधळ. परंतु मला त्याची भीती वाटली नाही. वादळ मला काहीही करू शकत नव्हती. कारण, माझ्या हातात चावी होती. स्वर्गातून उतरलेली ही चावी..."
"चावी..?" कर्नल पूर्ण वैतागला होता. देकार्तच्या गोष्टींना ना बूड ना तळ. कसली चावी...?"
कालच्या पार्टीतील दारूची नशा उतरलेली दिसत नाही सार्जंट मनातल्या मनात पुटपुटत होता.
"निसर्गाचे रहस्य उलगडून दाखविणारी चावी. " देकार्त स्वतःच्या तळहाताकडे बघत म्हणाला. कदाचित स्वप्नातल्या चावीचा शोध घेत असावा.

"परंतु ते आहे तरी काय?" कर्नल गास्परला उत्तर हवे होते.
"बीजगणित व भूमिती यांची सांधेजोड करणारी, त्याचे एकाच विषयात जोडणारी व यातून निसर्गाचे रहस्य उलगडून दाखवणारी ही गणिताची चावी आहे."
"गणित... गणित होय.. " कर्नलला हायसे वाटले. "दुपारी वेळेवर हजर रहा." बूट आपटत आपटत कर्नल बाहेर गेला.
"तुला काय वाटते?" देकार्त सार्जंटला विचारत होता.
सर, मी एक साधा शिपाई. मला तुमच्या स्वप्नातल्या घडामोडी कशा काय कळणार?" सार्जंट.
"बीजगणित व भूमितीला जोडून टाक....." . देकार्त बडबडत होता. . "याचा नेमका अर्थ काय... एकमेकांना जोडणारा एकही सामायिक घटक त्यांच्यात नाही.. गणिताच्या अभ्यासकांना हे नक्कीच माहित असायला हवे. ... ".

पुन्हा एकदा बिछान्यावर अंग टाकला. छताकडे बघत होता. . *याचा अर्थ काय? ईश्वराचा हा संदेश मला काय करायला हवे, हेच ते सांगत आहे.... परंतु नेमके काय..? .*

छतातील प्लास्टर निसटत्या स्थितीत होते. गांधिल माशी आत बाहेर करत होती. उडत होती. त्याच्या उडण्याच्या मार्गाला एक आकार होता. बीजगणित व भूमितीचे एकत्रीकरण मी कसे काय करू शकतो? त्या क्षणी तेथे उडत असलेल्या माशीला त्याचे उत्तर माहित होते की काय असे वाटत होते. परंतु माशी उत्तर सांगण्याच्या स्थितीत नव्हती.

****

दीड वर्षानंतर देकार्तची बदली बव्हेरियन सैन्य तुकडीत झाली. या तुकडीचा बहुतेक वेळ प्रत्यक्ष लढाईतच जात होता. शत्रूबरोबरची ही लढाई अत्यंत अटीतटीची होती. प्राग शहरात शेकडोनी सैनिक मारले गेले. प्रत्येक

इंच न इंच जमिनीसाठी शेकडो सैनिकांची कत्तल होत होती. व जिंकलेली ती जमीनसुद्धा रक्ताने काळवंडलेली होती.

बव्हेरियन सैन्याने शहराला वेढा घातला होता. परंतु मध्यभागी असलेल्या भक्कम तटबंदीमुळे शहराचा कब्जा त्यांना मिळत नव्हता. तोफा व बंदूकींचा मारा सतत चालू होता. भिंतींना तडे पाडण्यासाठी प्रयत्न केले जात होते. परंतु रात्र झाली की त्या भिंतींची दुरुस्ती केली जात होती व शत्रू सुरक्षित राहून या सैन्यावर तोफांचा मारा करायचा. काही वेळा दिवसाढवळ्या चाल करायचे. बव्हेरियन सैन्याला माघार घ्यावी लागत होती. तोफांना मागे सरकावे लागत होते. या तटबंदीच्या भोवतीच कित्येक दिवस लढाई चालू होती.

ऑगस्ट 1620 मधील एका दुपारी बव्हेरियन सैन्याच्या तोफा तटबंदीच्या भिंतीवर डागल्या जात होत्या. सैनिक ऑर्डरची वाट बघत उभे होते. हल्ला करायचे व सुरक्षित ठिकाणी मागे फिरायचे याची तयारी केली होती.
मेजर हॅफ्लेन तोफांच्या एका तुकडीचा नेतृत्व करत होता.
"कॅनन्स, वन् थ्रू फाइव्ह, फायर..."
जमीन हादरली. तोफेच्या तोंडातून गोळे बाहेर पडले. व भिंतीला मोठी फट पाडून दगड विटासकट त्या खाली आपटल्या. बव्हेरियन सैनिक प्रोत्साहन देत होते.
"सिक्स थ्रू थर्टीन... लोड. वन् थ्रू फाइव्ह, रिकव्हर यूवर पीस.... " ऑर्डरवर ऑर्डर.
"मेजर हॅफ्लेन, एक मिनिट... "
मेजर मागे न बघताच "देकार्त, प्लीज आता नको. मला वेळ नाही.... "
देकार्त एका लहान मुलासारखा हसत हसत त्याच्या मागे जाऊन "तुला नक्कीच आवडेल..." असे म्हणाला.
"सिक्स थ्रू थर्टीन, फायर..." मेजर हॅफ्लेन,

पुन्हा एकदा जबरदस्त आवाज आला. गंधकमिश्रित धूर सगळीकडे पसरू लागला. नाकातोंडात जाऊ लागला. बघता बघता गोळे भिंतीवर आपटून इजा न करता परत आले. यात काही सैनिक चिरडले गेले. धूळ पसरत होता. मेजर हॅफ्लेनला आपलेच सैनिक मेल्याचे दुःख नव्हते. बदली सैनिकांना तोफांचा ताबा घेण्याची ऑर्डर त्यानी दिली.

"मेजर, तोफेची चाकं ढिली झाले आहेत" सैनिकांची तक्रार.

"बदलून टाक व तोफा तयार ठेव, वन् थ्रू फाइव्ह, फायर..." मेजर हॅफ्लेन मेजरच्या जवळ असलेल्या एका छोट्या टेकडीवर देकार्त उभा राहिला. तेथे कर्नलही उभा होता. देकार्तच्या युनिफॉर्मवर एकसुद्धा सुरकुती नव्हती. लढाईसाठी यायच्याऐवजी कुठल्यातरी एखाद्या पार्टीला आल्यासारखा त्याचा पोषाख होता.

"सकाळी माझ्या बिछान्यात पडलो होतो. व माझ्या लक्षात आले की

... ती खरोखरच त्रिमितीतील वस्तू होती."

"वन् थ्रू फाइव्ह, फायर... "

तोफेच्या तोंडातून बाहेर पडणारे गोळे धूर ओकत बाहेर येत होते. धूळ, गंधकमिश्रित धूर, व कानठळया बसणारा आवाज जणू मृत्युची चाहूल देणारे होते.

या सर्व गोंधळातसुद्धा देकार्तला जे काही सांगायचे होते ते सांगू लागला.

"नियमित बहुभुजाकृती असलेल्या त्रिमितीतील वस्तूत कोपरे (vertices), पृष्ठक (faces) व भुजा (sides) यांचा एकमेकाशी संबंध आहे, हे माझ्या लक्षात आले आहे. मेजर, कोपरे अधिक पृष्ठक यातून भुजा वजा केल्यास त्याचे उत्तर नेहमीच 2 येईल. खरोखरच तू कुठलिही भुजाकृती घेऊ शकतोस. $(f+v-s=2)$ "

त्याचा चेहरा माखलेला झाला. पोषाख काळाकुट्ट झाला. नाकातोंडात धूर जात होता.

"हे असले काही तरी सांगण्यासाठी या अटीतटीच्या लढाईच्या वेळी तू आलास की काय?" मेजरचे रागीट उद्गार.

"हे बघ, भूमितीतील आकारांचे बीजगणितातील समीकरणात मांडणी होऊ शकते हे यावरून सिद्ध होत नाही का? भूमिती व बीजगणित यांच्यात नक्कीच काही नातं असलं पाहिजे. "

मेजर हॅफ्लेन ऐकण्याच्या मनस्थितीत नव्हता. मागे फिरून "सिक्स थ्री थर्टीन, फायर..." त्यानी आर्डर दिली.

तटबंदीच्या पलीकडून मोठा आवाज ऐकू आला. तेथील बिगूल वाजत होते. मेजर देकार्त व कर्नल उभे असलेल्या टेकडीवर चढत "सर, ते आपल्यावर हल्ला करणार आहेत. त्यांना डाव्या बाजूने हल्ला करू दे. व आपण त्यांच्यावर बंदूका रोखू."

कर्नल देकार्तला गदगदा हलवत "कॅप्टन, तुझ्या गणिताच्या अभ्यासात व्यत्यय तर येत नाही ना? दुपारीसुद्धा ही लढाई अशीच चालू राहणार आहे."

"नाही सर, दुपार झाल्यानंतर मला काही सुचत नाही. नवीन विचारांसाठी सकाळची वेळ सर्वात उत्तम. बिछान्यावर पडल्या पडल्या काही तरी सुचतेच."

कर्नल काहीही न बोलता सैनिकांच्या मागे धावत धावत गेला.

पुढचा पूर्ण आठवडा याच धुमश्चक्रीत निघून गेला. अशा गोंधळातसुद्धा देकार्त बिछान्यावर पडून काही तरी विचार करत होता. नजर छपराकडे. माशी छपरापर्यंत जात होती. घिरकी घेत होती. खाली वर करत होती. देकार्तला या माशीच्या उडण्याचेच कौतुक वाटू लागले.

देकार्त पडल्या पडल्या बडबडू लागला. *ही माशी कमानीच्या आकारात उडते. वर्तुळाच्या आकारात उडते. हवेत वेगवेगळे आकार काढते. व हे आकार भूमितीतील आकारांशी मिळते जुळते आहेत, हेच तिला माहित नाही.*

हाच धागा पकडून तो विचार करू लागला. *ही माशी कशी कशी जाते त्या आकारातील प्रत्येक बिंदूला मी ओळखू शकलो तर त्या कमानीच्या आकारासाठी मी एक समीकरण लिहू शकेन. असे म्हणत असतानाच काही तरी चमत्कार झाल्यासारखे त्याला वाटू लागले. भूमितीय आकारातील प्रत्येक बिंदूचे वर्णन करण्यासाठी बीजगणितातील समीकरणांचा वापर करत येईल.* स्वतःच बडबडत होता.

डोक्यात काही तरी सणकन शिरल्यासारखे त्याला वाटले. *हे मी करू शकलो तर भूमितीतील समस्यांच्या उत्तरांसाठी बीजगणिताचा वापर करता येईल. याचाच शोध मला घ्यायचा आहे व हीच ती चावी आहे.*

देकार्तने आतून कडी लावून घेतली. व माशी कशी कशी उडते याकडे लक्षपूर्वक बघू लागला. *माशीच्या उडण्याच्या वाटेवरील प्रत्येक बिंदूचा मी मागोवा कसा घेऊ शकतो? त्या बिंदूंचा वापर करून मी समीकरणात कशी काय मांडू शकतो?* त्याच्या डोक्यात अशा प्रश्नाव्यतिरिक्त काही शिरतच नव्हते.

तितक्यात माशी भिंतीवरून खाली खाली सरकू लागली.
आता हे सोपे झाले. छतापासून खाली 2 फूट व मागच्या भिंतीच्या एका बाजूपासून 5 फूटावर ही माशी आता आहे. माशीने पुन्हा एकदा झेप घेतली. छताच्या मध्यापर्यंत जाऊन ती सर्रकन खाली घसरली.

सुचलेल्या या कल्पनेचाच त्याला धक्का बसला. देकार्तला माशाच्या मार्गाचा मागोवा घेणे सोपे आहे असे वाटू लागले. खोलीतील कुठल्याही बिंदूचा तो वर्णन करू शकत होता. छत, जमीन, मागील भिंत वा बाजूची भिंत

यांच्या सहाय्याने माशी प्रत्येक क्षणी नेमके कुठे आहे, हे अंतर मोजून सांगणे शक्य होणार होते. त्यावरून माशीचा उडण्याचा मार्ग व त्याचा प्रत्यक्ष आकार कळणार होते. आपल्याला सुचलेल्या कल्पनेवर तो खूश होता व त्यावर त्याचा पूर्ण विश्वास होता.

एवढेच नव्हे तर भिंतींच्या पृष्ठभागांचीसुद्धा गरज भासणार नाही पृष्ठभागाऐवजी कोपऱ्यातील रेषासुद्धा चालले असते. छत, जमीन, मागील भिंत वा बाजूची भिंत एकमेकांना कुठे छेदतात त्या बिंदूपासून काटकोन करून तीन रेषा ओढल्यास आलेखातील अक्ष तयार होतील व छतापर्यंत ती रेघ जाईल.

एका निसटत्या क्षणात कोडे सुटल्यालारखे त्याला वाटले. ग्रिडमधील रेषा वापरून खोलींची रचना दाखवता येईल. व या रेषांच्या सहाय्याने बिंदूंचे स्थान निर्देश करता येईल, हे त्याच्या लक्षात आले. त्याकाळचे नकाशे बनविणारे अशा प्रकारच्या कोऑर्डिनेट्सचे सर्रासपणे वापर करत होते. देकार्त यांनीसुद्धा त्यांचाच वापर करण्याचे ठरवले व स्वतःच्या नावावरून या अक्षांना कार्टेसियन कोऑर्डिनेट्स असे नाव दिले. या अक्षांच्या व बिंदूंच्या सहाय्याने समीकरणात रूपांतर केल्यास कुठलीही भूमितीय आकृती वा वक्र रेषा ओळखणे शक्य झाले. या बिंदूंच्या साखळीचे समीकरणात मांडता येईल याची त्याला खात्री होती.

अशा प्रकारे भूमिती व बीजगणित यांचे एकत्रीकरण झाले व विश्लेषक भूमिती या गणितातील नवीन शाखेचा उदय झाला व विश्वाचे रहस्य शोधण्याची चावी सापडली.

रेने देकार्तला हे सर्व जगासमोर आणून प्रसिद्ध करण्यासाठी आणखी 25 वर्षे लागली. त्याच्या तत्वज्ञानाच्या पुस्तकात याबद्दलचे वर्णन आहे.

गेली 300 वर्षे या विश्लेषक भूमितीचा अभ्यास होत असून गणितातील गुंतागुंतींच्या व क्लिष्ट समस्यांना उत्तरं शोधण्यासाठी याचा मोठ्या प्रमाणात

वापर होतो. भूमितीच्या अभ्यासाचा प्रारंभच या कार्टेसियन कोऑर्डिनेट्स-पासूनच होतो व त्यासाठी आपण रेने देकार्तला धन्यवाद द्यायला हवे.

●●●

जुगाऱ्यांच्या अड्ड्यावर

माणूस प्राणी हा खेळात मग्न होणारा प्राणी आहे, असे म्हटल्यास अतिशयोक्ती ठरणार नाही. खेळ फक्त खेळासाठी हे तत्वतः मान्य असले तरी खेळ जुगारात वा सट्टेबाजीत केव्हा बदलतो हे कळूनसुद्धा येणार नाही. जुगार पैज, वा स्पर्धा यात आपले मन रमते हे नाकारता येत नाही. बॅबिलोनियन, ग्रीक, रोमन, इजिप्शियन या अती पुरातन संस्कृतीत या संबंधी भरपूर उल्लेख सापडतात. आपल्या महाभारतात पांडवानी कौरवाविरुद्ध द्यूत खेळताना आपल्या बायकोलाच पणाला लावले होते यावरून कुठल्या थराला माणूस जुगाराच्या आहारी जाऊ शकतो याची कल्पना येईल. आज जुगाराच्या प्रकारात मोठ्या प्रमाणात विविधता आहे; त्याकाळी तेवढी विविधता नव्हती. त्याकाळी जुगार खेळण्यासाठीचे फासे प्राण्यांच्या हाडांच्या वा धातूच्या होत्या; आता त्या प्लॅस्टिकच्या आहेत हा फरक सोडल्यास त्याच्या मागील मानसिकता तशीच, त्या प्राचीन काळासारखी.

या पुरातन संस्कृतीत फासे फेकून द्यूत खेळत असले तरी त्याकाळातील राजा - महाराजांच्या पदरी असलेल्या गणितज्ञांना द्यूतात जिंकावे कसे वा जिंकण्याची शक्यता किती याचे ठोकताळेही माहित नव्हते. सर्व काही नशीबाचा खेळ म्हणूनच या प्रकाराकडे बघितले जात होते. यामागे गणित असण्याच्या शक्यतेबद्दलचा विचार प्रथमच 17व्या शतकात केला गेला. या समस्येच्याबद्दल विचार करणाऱ्यामध्ये **ब्लेज पास्कल** *(1623-1662) हा फ्रेंच व्यावसायिक गणितज्ञ व* **पियरे द फेर्मा** *(1601 – 1665) हा व्यवसायाने वकील परंतु एक हौशी गणितज्ञ यांचा पुढाकार होता. या दोघांच्यात प्रथम याचे उत्तर कोण शोधून काढतो याबद्दल मैत्रीपूर्ण लढत होती. व यात पियरे फेर्मा यशस्वी झाला. परंतु या प्रक्रियेत सिद्धांताला तेवढे महत्व नाही; कारण फेर्माच्या विक्षिप्त वागणुकीमुळे सिद्धांत शोधून काढण्यासाठी भरपूर हेलकावे,*

चढ उतार, खलित्यांची लढाई बघावे लागले. याचाच हा एक काल्पनिक कथा प्रसंग.

फेर्मा टेबलावर असलेले पत्र उचलून वाचू लागला.

प्रिय पियरे,

तू फार कठोर मनाचा आहेस. एक नंबरचा बदमाशही आहेस. मागच्या वेळी तू पाठविलेल्या प्रमेयाचे उत्तर शोधताना माझी त्रेधातिरपट उडाली. तू चक्क मला फसवत होतास. कदाचित आम्हाला डिवचण्यासाठी रात्रभर बसून प्रमेयांचा शोध घेतोस की काय?

पियरे, मला माहित आहे की तुला अपरिमेय संख्या फार आवडतात. त्यांच्या वैशिष्ट्यपूर्ण गुणधर्मांने तुझ्यावर जादू केली आहे. परंतु या वेळची समस्या अगदीच अफलातून आहे. तू जरा जास्तच सुटल्यासारखा वाटतोस. उदा, तुझा हा प्रमेय बघ:

p ही एक अपरिमेय संख्या आणि r ही एक कुठलिही संख्या असल्यास $(r^{(p-1)} - 1)$ या संख्येला p ने पूर्णपणे भाग जातो. हे तुला कसे सुचले हे तरी सांग. किंवा हे सिद्ध करण्यासाठी एखादी hint तरी दे.

मी शंभरपर्यंतच्या संख्यांचा वापर करून तुझे हे गृहितक बरोबर आहे हे तपासले. परंतु यामागील सिद्धांताचे काय? तू hint दिलास तर मी प्रयत्न करू शकेन.

तुझा मित्र,

फ्रेनिकल बेसी

पत्र वाचताना फेर्माला हसू आवरेना. "याला मी काही हिंट बिंट देणार नाही. थोडी तरी अक्कल वापरू दे. सगळ्याना चमच्यानी भरवायला हवे.... जाऊ दे..."

फेर्मा स्वतःवर भलताच खुश होता. अशा गमतीशीर प्रमेयांचा खजीनाच

त्याच्याकडे होता. त्याच्या जादूच्या पिशवीतून काय बाहेर पडेल याचा नेम नव्हता. मित्रांना कूटप्रश्न घालण्यात त्याला मजा वाटत होती. तितक्यात त्याचे लक्ष दुसऱ्या पत्रावर पडले. फेर्मा गंभीर होत पत्र उघडू लागला. हे पत्र त्याचा जिवलग मित्र, ब्लेज पास्कलचे होते. फासे टाकून जुगार खेळत असताना खेळ जिंकण्यासाठी दोन्ही प्रतिस्पर्ध्यांनी किती पॉइंट्स कमवावेत, किती वेळा फासे टाकायला हवेत याचा काथ्याकूट गेली सहा महिने पत्राद्वारे ते दोघे करत होते. मुळात यात निरीक्षणालाच जास्त वाव होता. परंतु त्यातून एखादा गणितीय सिद्धांत सापडतो का याबद्दल त्या दोघांना उत्सुकता होती.
"झोपायला येतोस की नाही?" बायको, लुई, जरा चिडूनच विचारत होती.
"पाच मिनटं, लुई..."

बायको तणतणत जिना चढून गेल्याचा आवाज त्याला ऐकू आला. जिन्यावरूनच "तुझ्या उद्याच्या खटल्याची तयारी झाली की नाही?" बायकोचा प्रश्न

"ती तयारी अजून व्हायची आहे. तू झोप." फेर्मा कंदील घेऊन आतल्या अभ्यासिकेत जाऊ लागला. जिन्यावरून उतरून बायको त्याच्या मागे मागे आली. "उद्याचा खटला फार महत्वाचा आहे. तुझ्यामुळे..." वाक्य अर्धवट तोडत तिने खोलीतील पसाऱ्याकडे नजर फिरवली. सगळीकडे कागदाचे चिटोरे पडले होते. परंतु त्यावर फक्त आकडेमोड. थोडेसे चिडूनच ती म्हणाली, "पुन्हा तू गणिताच्या मागे लागलास! "
फेर्मा कायद्याच्या जाडजूड पुस्तकाखाली हातातील चिटोरे सरकवत व घाबरत घाबरतच "तुला असे का वाटते?" असे विचारला.
त्याच्या चेहऱ्याकडे हातवारे करत "उद्याच्या खटल्यातील तुझ्या बचावामुळे एखाद्याचा जीव वाचण्याची शक्यता आहे, हे तुला माहित आहे का? आणि तू मात्र गणितातील आकड्यांच्या नादात आहेस..." जवळ जवळ ती

किंचाळलीच.
"खर सांगू का... मला यात मजा वाटते. व शेवटी गणितही महत्वाचे आहे की..."

53 वर्षाचा पियरे हा एक निष्णात वकील होता. व पार्लिमेंटचा कायदा सल्लागार होता. परंतु वकिली व्यवसायात फार मोठे पद मिळावे, भरपूर पैसे कमवावेत असली महत्वाकांक्षा त्याच्याकडे नव्हती. एका श्रीमंत वस्तीत त्याचे घर होते. मुलं मोठी झाली होती. त्याच्यावर जास्त जबाबदारी नव्हती. वकिलीतून पैसे मिळत होते. खाऊन पिऊन सुखी राहण्यास तेवढे पैसे पुरेसे ठरत होते. त्यामुळे त्याचा बहुतेक वेळ जोपासलेल्या गणिताच्या छंदापायी खर्ची जात होता.

बायकोनी आता त्याला रंगेहात पकडल्यामुळे त्याचा नाइलाज झाला. कायद्याच्या पुस्तकाखाली लपवून ठेवलेले कागद बाहेर काढत "मला या पास्कलची फार भीती वाटत आहे." असे बायकोला सांगू लागला.

"काय झालं? तो बरा आहे ना?"

"लुई, तस काही नाही. जुगारात कोण जिंकू शकतो याबद्दलचा **संभाव्यता सिद्धांताचा** कोण प्रथम शोध लावतो याबद्दलची पैज आम्ही लावलेली आहे. कदाचित ब्लेज पास्कल जिंकण्याची शक्यता आहे. त्याची मला भीती वाटत आहे."
"परंतु तू कधीही जुगार खेळत नाहीस!"
"मला जुगार हे एक गणितातील कोडे वाटते. यात जुगारापेक्षा संभाव्यतेवर जास्त लक्ष केंद्रित केले आहे. संख्याच्या या सिद्धांतात ते नेमके कसे काम करतात याचा शोध आम्हाला घ्यायचा आहे. ...."

लुई जांभई देत, "पियरे तुझ काही खरं नाही. तुझा सगळा वेळ गणितात जातो. परंतु तू काहीच प्रसिद्ध का करत नाहीस?"

"मी करत असलेल्या कामाचे शिस्तबद्धपणे लिहून ठेवणे हा मला फार कंटाळवाणा प्रकार वाटतो. खेळ जिंकण्यापेक्षा त्या खेळात भाग घेण्यात खरी मजा असते. अज्ञानाच्या शोधात मजा असते. हजारो वर्षे न सुटलेल्या प्रमेयाचे गूढ उकलण्यात मजा असते."

लुईला याचे म्हणणे पटत नव्हते. मेणबत्ती हातात घेत, "तुझं खरही असेल. परंतु मला पास्कलची फार काळजी वाटते. जरा पद्धतशीरपणे विचार करत असल्यास ....."

फेर्मा तिला मध्येच तोडत "संभाव्यता सिद्धांताबद्दलचे माझे नैराश्य लपवण्यासाठी मी अत्यंत कठिण समस्यांच्या शोधात असतो. म्हणूनच बेसीसारखे बिचारे माझ्यावर चिडतात."

दुसऱ्या दिवशी फेर्मा वकीली पोषाख चढवून कोर्टात बसला होता. आरोपीचा वकील काही कायदेशीर मुद्दे उपस्थित करून न्यायाधीशाला पटवून देण्याचा प्रयत्न करत होता. सरकारी वकील म्हणून फेर्मासुद्धा तर्क लढवत प्रतिपक्षाचे प्रत्येक मुद्दे खोडून काढत होता. आरोपीचा वकील उलटतपासणी घेत होता. फेर्माला बसल्या बसल्या खटल्याचा हा प्रकार जुगारासारखे आहे असे एकदम त्याला वाटू लागले. दोघेही निष्णात वकील. न्यायाधीशाला पटवण्यासाठी एकमेकावर कुरघोडी करण्याच्या प्रयत्नात आहेत. प्रत्येक खेळाडूनी किती मुद्दे न्यायाधीशासमोर ठेवल्यास केस जिंकण्याची शक्यता आहे?

तसे नसावे, फेर्मा स्वतःशीच बोलत होता. प्रश्न हा आहे की कमीत कमी आणखी किती मुद्दे समोर ठेवल्यास केस जिंकण्याची संभाव्यता वाढू शकेल?

या नव्या विचारातच तो गुंग असताना कोर्टासमोर काय चालले आहे, साक्षीदार काय बोलत आहे व आरोपीचा वकील काय पुरावे दाखवत आहे याकडे त्याचे अजिबात लक्ष नव्हते. न्यायाधीश, समोर ठेवलेल्या मुद्द्यांना

कसा अर्थ लावत आहे, याचेही त्याला भान नव्हते. त्याचे काम झाले आहे म्हणून पुढच्या सोपस्कारात वेळ न दवडता तो बाहेर पडला. निकाल काय होता, शिक्षा कुणाला झाली, किती झाली याची साद्यंत माहिती सरकारी वकील म्हणून पार्लिमेंटला ताबडतोब द्यायचे असते. असले काहीही न करता भराभरा तो आपल्या घरी निघून गेला.

घरात शिरल्या शिरल्या संभाव्यतेबद्दल डोक्यात आलेल्या नवीन कल्पनांना तो वाट करून देऊ लागला. संभाव्यता सिद्धांतात जितके वेळा घटना घडून येते ही संख्या क्ष असल्यास व जितके वेळा घटना घडत नाही ती संख्या य असल्यास क्ष/(क्ष+य) या अपूर्णांकाने संभाव्यता ओळखली जाते. फेर्माचा हा एक विचार प्रयोग होता. त्यात तो 2 वेळा नाणे उडवल्यास काय होते, 3 वेळा उडवल्यास काय होते, 4 वेळा उडवल्यास ... असा विचार करत गेला. ही गोष्ट generalize करता येते व सिद्धांताच्या स्वरूपात मांडता येते हे त्याच्या लक्षात आले. छाप-काटा वा फासे फेकून मिळालेले अपेक्षित उत्तर लढतीचा निकाल देऊ शकते. परंतु या परिणामासाठी किती पॉइंट्स हा एक कळीचा मुद्दा असतो.

जुगार खेळणाऱ्या दोघानाही आपणच जिंकणार याची खात्री असते. दोघांचीही जिंकण्याची शक्यता असल्यास प्रत्येकाची संभाव्यता सम असते. परंतु दोघानाही जिंकण्यासाठी दोन पॉइंट्स हवे असल्यास जिंकण्याची संभाव्यता समच असू शकेल का? मुरलेल्या सट्टेबाजांना ही संभाव्यता समच आहे असे वाटत असते. ते कितपत खरे आहे? याचा शोध फेर्माला घ्यायचे होते. जेव्हा त्याला या सर्व प्रकारांचा सिद्धांतात मांडणी करता येते हे लक्षात आल्यानंतर त्याचा आनंद गगनात मावेना.

लुई त्याच्या अभ्यासिकेत डोकावून "खटल्याचा निकाल काय लागला" असे विचारली.

"लुई, माझ्या डोक्यात एक नवीन कल्पना आली आहे, एक नवीन विचार घोळत आहे. मला नवीन काही तरी सापडल्यासारखे वाटत आहे." फेर्मा

"तू फारच उत्तेजित झालेला आहेस कदाचित गणिताचा प्रमेय असेल."

"मी संभाव्यता सिद्धांत शोधून काढले आहे. पास्कलला मी हरवले आहे."

"अभिनंदन.. परंतु खटल्याचा निकाल..."

तिच्या बोलण्याकडे लक्ष न देता तो जरा हसतच म्हणाला "या संभाव्यता सिद्धांताच्या शोधाच्या निमित्ताने बेसीला अजून एक जास्त कठिण असलेले कूट प्रश्न पाठवतो. त्याच उत्तर तो कसा काय शोधतो हे मला बघायचे आहे." पुस्तकाच्या कपाटातून एक पुस्तक काढून "पान मिळाले. पाठवून टाकतो." असे म्हणत तो डेस्कपाशी जातो.

"परंतु खटल्याचा निकाल काय लागला... " बायकोचा ठेका.
खालच्या आवाजात "या संभाव्यता सिद्धांताच्या विचारामुळे निकाल काय लागला हे ऐकण्याअगोदरच मी बाहेर पडलो." फेर्मा सांगू लागला. बायको जाम वैतागली. व तणतणत निघून गेली.

***

गणिताच्या जगात पियरे फेर्माला प्रिन्स म्हणून ओळखतात. अनेकांना तो 17व्या शतकातील एक महान गणितज्ञ असे वाटते. विश्लेषक भूमिती, डिफरन्शियल व इंटिग्रल कॅल्क्युलस, संभाव्यता सिद्धांत, व संख्या सिद्धांत यांच्या विकासासाठी त्याचा फार मोठा योगदान होता. त्यातही संभाव्यता सिद्धांताचा शोध फार महत्वाचा मानला जातो.

परंतु फेर्माच्या नावाचा उच्चार केल्यास अनेकांना त्याच्या संभाव्यता सिद्धांताऐवजी त्याच्या Last Theoremचीच आठवण येते. त्यानी त्याचे हे 'शेवटचे प्रमेय' कुठेही प्रसिद्ध केले नव्हते. कुठेही पुस्तक वा मुद्रित स्वरूपात ते उपलब्ध नव्हते. कुठे तरी पुस्तक वाचताना मार्जिनमध्ये गिचमिड अक्षरात लिहून काढलेल्या अनेक प्रमेयात हा प्रमेय त्याच्या मित्रांना, त्याच्या मृत्यु पश्चात, सापडला

व पाठ्यपुस्तकाच्या स्वरूपात मित्रांनी त्याला प्रसिद्धी मिळवून दिली. त्या पाठ्यपुस्तकात अनेक प्रमेयांचा व त्याच्या उत्तरांचा उल्लेख आहे परंतु ती सोडवण्याची रीत नाही. व नोट्समध्ये फेर्माने हे शोधून काढले आहे एवढाच उल्लेख आहे.

गेली दोन - तीनशे वर्षे जगभरातील गणितज्ञ याच्या प्रूफच्या शोधात होते. फेर्माच्या खरेखोटेपणाबद्दल शोध घेत होते. वर उल्लेख केलेल्या बेसीच्या पत्रातील प्रमेयाचे प्रूफ शंभर वर्षांनंतर लाग्रांज या गणितज्ञाने शोधून काढले. फेर्माच्या शेवटच्या प्रमेयासाठी नोबेल पारितोषकाच्या वेळी मिळणाऱ्या मानधनाइतकी रक्कम प्रूफ शोधणाऱ्याला मिळणार होते. 1993 मध्ये प्रिन्स्टन येथील **अँड्र्यू वाइल्स** या गणितज्ञाने प्रथमच शेवटच्या प्रमेयाचे प्रूफ शोधून काढले. सर्व गणितज्ञ आश्चर्यचकित झाले. तरीसुद्धा वाइल्सच्या मांडणीत चूक सापडते का? याचा शोध अजूनही गणितज्ञ घेत आहेत.

बिनचूक प्रूफ कधी मिळेल हे फक्त अस्तित्वात नसलेला तो परमेश्वरच सांगू शकेल!

(जर त्याला गणिताचे ज्ञान असल्यास!)

●●●

कोनिग्सबर्गच्या पुलावरील परेड

आतापर्यंत होऊन गेलेल्या गणितज्ञांपैकी एक बहुआयामी, अत्यंत प्रतिभावान व्यक्ती म्हणून लिओन्हार्ड ऑयलर (1707-1783) या गणितज्ञाचे नाव सर्वात वरच्या क्रमांकावर असेल. दर वर्षी सुमारे 800 पानं लिहित आयुष्यभरात त्यांनी गणित विषयात सुमारे 500 अभ्यासपूर्ण ग्रंथांची भर घातली. सगळ्यात महत्वाचे म्हणजे वापरात असलेल्या गणितीय प्रमाणित संज्ञांसाठी इतर कुठल्याही गणितज्ञांपेक्षा त्याचे जास्त योगदान होते. जास्तीत जास्त दोन संज्ञा शोधणारे अनेक होते. परंतु ऑयलर यांनी π, e, $\sum$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ *and* $f(x)$ *या सात संज्ञा गणितविश्वात प्रचारात आणल्या. या संज्ञेमुळे गणितविश्व समृद्ध झाले. ऑयलरच्या स्पष्टीकरणातून चंद्राची भ्रमणगती नेमकी किती आहे हे लक्षात आले. अनंत श्रेणीचे (Infinite Series) महत्व व मर्यादा याबद्दलही ऑयलर यानी मोठ्या प्रमाणात लिहून ठेवले आहे. संख्या सिद्धांतातील त्याचे योगदानही मोठे होते. व या सर्वापेक्षा अत्यंत महत्वाचे म्हणजे गणितशास्त्रात त्यानी टोपोलॉजी या एका नवीन शाखेला जन्म दिला. टोपोलॉजी ही एक भूमितीशाखा असून आकार व आकृती यात बदल झाल्यामुळे गुणविशेषात फरक पडत नाही अशा गोष्टींचा ऊहापोह करण्यावर त्यात लक्ष केंद्रित केले आहे. याच टोपोलॉजीवर आधारित कोनिग्सबर्ग प्रॉब्लम ऑफ सेव्हन ब्रिजेस म्हणून ओळखत असलेल्या कोड्याचा गुंता सोडवण्याचा ऑयलर यांनी प्रयत्न केला होता. त्याचीच ही एक कल्पित कहाणी.*

"माझं येथे लक्षच लागत नाही! कसली कडाक्याची थंडी!"
हाताची मुठी आवळून थंडीने कुडकुडत असलेला हा हडकुळा प्राध्यापक क्लासमध्ये अक्षरशः किंचाळत होता.
"डिमिट्री, त्या शेकोटीत अजून लाकडं आणून टाक बाबा. मेंदूच गोठल्यास

माझं लेक्चर ऐकणं व गणित सोडवणं शक्य होणार नाही."
"परंतु सर, माझी पाळी संपली आहे. मागच्या वेळी मीच लाकडं आणून टाकली होती..."

"आणि तूच यानंतरसुद्धा लाकडं आणणार आहेस! माझ्या क्लासमध्ये कुणीही झोपत असलेले मला चालत नाही. तू मागच्या बेंचवर बसल्यामुळे मला कळणार नाही असे समजू नकोस.".

18-19 वर्षाचा गोरापान, राजबिंडा डिमिट्री खुर्ची मागे सरकवून थोड्याशा नाराजीनेच दरवाज्याकडे जाऊ लागला. मित्राच्या डेस्कजवळ जाताना "या आंधळया प्राध्यापकाला मी डोळे मिटले होते हे कसे काय कळले असेल?"

असे पुटपुटत पुढे जाऊ लागला.

"डिमिट्री, माझी दृष्टी अधू असेल, परंतु कान तीक्ष्ण आहेत हे विसरू नकोस. "

29 वर्षाच्या या प्रोफेसरला गेली तीन वर्षे नीट दिसत नव्हते. ऑयलरच्या दृष्टीदोषाचा फायदा घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांना कोंडीत पकडण्यात त्याला मजा वाटत होती.

"डिमिट्री, उशीर करू नकोस. या बिल्डिंगच्या पाठीमागच्या दरवाज्याजवळ सरपण ठेवलेले आहे."

"ती आता रिकामी झाली आहे, सर. हिवाळा भरपूर लांबला आहे. "

सेंट पीटर्सबर्गचा हिवाळा जास्त लांबतच चालला आहे, असे सर्वांना वाटत होते. थंडीसुद्धा कडाक्याची होती. दरवर्षी हे प्रमाण वाढतच चालले आहे, असे अनेकाना वाटत होते. 1735चा हिवाळा तरी वेगळा का असावा? ऑयलर शिकवत असलेली ही खोली तेवढी प्रशस्त नव्हती. खोलीत जेमतेम चाळीसेक विद्यार्थी मावले असते. अगदीच लाकडाची पेटी नसली तरी पॉलिश केलेल्या लाकडांच्या फळयाची जमीन, काही उंच उंच खिडक्या, धूर ओकणारे व मंद प्रकाश देणारे काही गॅस लँप्स, व कोपऱ्यात एक छोटीशी

शेकोटी असे त्या खोलीचे स्वरूप होते. ऑयलर सेंट पीटर्सबर्ग अकॅडेमीतील गणित विभागाचा मुख्य होता.

1735चा मार्च महिना. सेंट पीटर्सबर्ग शहर हिमाच्छादित झाले होते. कदाचित फळाफुलांना बहर आणणारा वसंत ऋतू लांबणार की काय असे वाटत होते. प्रोफेसर ऑयलर विद्यार्थ्यांकडे वळून "आपण इन्फायनेट सीरीजबद्दल चर्चा करत होतो की नाही? या थंडीने आपल्या चर्चेत व्यत्यय आणला.".

ऑयलर खुर्चीत रेलून बसला. समोर लांब टेबल. त्याचे सडपातळ हात मांडीवर विसावले होते. प्रोफेसरला त्यासुद्धा उचलता येतील की नाही एवढा अशक्तपणा जाणवत होता. परंतु त्याच्या चारी मुलांना उचलण्याइतपत त्या समर्थ होत्या, हे मात्र नक्की. किरकोळ बांध्याचा हा प्रोफेसर दिसायला तेवढा आकर्षक नव्हता. मात्र डोळे मिस्किल होते. चेहऱ्यावर कायमचे मंदहास्य. डिमिट्री धापा टाकतच ओंडके घेऊन आला. शेकोटी पेटू लागली. ऑयलरला बरे वाटू लागले.

"शेकोटी पेटल्यावर ऊब येईल. ऊब आल्यास विचारात स्पष्टता येईल. डिमिट्री थँक्स. आपण आता Divergent व convergent श्रेणीबद्दल चर्चा करणार आहोत. व चर्चा संपेपर्यंत डोळे उघडे ठेव." क्लास हसू लागला. डिमिट्रीचा चेहरा लालबुंद झाला व तो मागच्या बेंचवर जाऊन बसला.

"आपण आता एका साध्या उदाहरणापासून सुरुवात करू या. पीटर, बोर्डवर लिही:

x = 1-2+3-4+5-6............n. सगळ्यांना कळू दे तरी. "
तांबूस केसांचा पीटर खडू खरचटत लिहू लागला. ऑयलर मात्र आपले बोलणे चालू ठेवत होता.

"ही श्रेणी divergent की convergent? कुणी सांगू शकेल का? हात वर करा."

मागे बसलेला बालिश चेहऱ्याचा विद्यार्थी, " सर, ही convergent श्रेणी आहे. श्रेणी कितीही लांबली तरी एक निश्चित उत्तर त्यातून मिळणार आहे. म्हणजे n अधिक (n+1) पदं असल्यास ही श्रेणी निश्चित संख्येकडे जाणार."

"कुणाला तरी हे पटत नाही असे वाटते का?"

डिमिट्री उभा राहून," सर, ही divergent सीरीज आहे. प्रत्येक पद वाढत जात असताना एकदा + व पुन्हा - होत असल्यामुळे सिरीज अनंतापर्यंत वाढली तरी बेरीज अनिश्चित असणार. त्यामुळे ही divergent सीरीज आहे."

ऑयलर हसतच म्हणाला, " दोन्ही बाजूनी मांडणी केली जात आहे. परंतु यापैकी एकच उत्तर बरोबर असणार. आपण आता अजून एका उदाहरणावरून ही चर्चा पुढे नेऊ या. आपण याच श्रेणीचे व्यस्तांक (reciprocals)घेतल्यास काय होते ते पाहू या. व्यस्तांक असलेली श्रेणी अशी असेल.

x=1/1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6.......1/n. कुणी तरी बोर्डवर लिहून काढा बघू."

ऑयलर खडूची खरखर संपेपपर्यंत स्तब्ध उभा राहिला.

"डिमिट्री, ही सिरीज divergent की convergent ?"

डिमिट्री काही क्षण गोंधळला. नंतर स्वतःला सावरत, "सर, निश्चितपणे convergent!"

"का?"

"यातील प्रत्येक पद लहान लहान होत आहे. व काही पदानंतर शून्याच्या जवळपास ते जाईल. त्यामुळे श्रेणीची बेरीज एका निश्चित संख्येपर्यंत पोचणार."

ऑयलर हात वर करत, "छान, छान. अगदी बरोबर, डिमिट्री. आपण आता पहिल्या श्रेणीकडे वळू या....."

तितक्यात शेजारच्या ऑफिसरूम मधून आरडा ओरडा ऐकू येऊ लागला. आदळ आपट व वाढत्या गलक्यामुळे चर्चा करणे अशक्य झाले. सर्व जण गप्प बसले. क्लासरूमचा दरवाजा उघडून स्वतःचे स्कर्ट सांभाळत ऑयलरची सेक्रेटरी, मादाम ब्रोव्हिन्स्की घाबरत घाबरतच ऑयलर समोर येऊन उभी राहिली.

"सॉरी, व्यत्यय आणल्याबद्दल. परंतु एक जर्मन माणूस...."

पलिकडच्या ऑफिसमधून आवाज आला, "हेर् गुटेर्लिंग, कोनिग्सबर्गचा मेयर...."

ब्रोव्हिन्स्की पूर्ण वैतागली. तिचे डोळे किलकिले झाले. आवाज बारीक करत,

"एक उद्धट जर्मन माणूस आला असून त्याला गणिताची समस्या सोडविण्यासाठी तुम्हाला ताबडतोब भेटायचे आहे. "

"त्याला जर्मन गणितज्ञांकडे जायला सांग."

"सर, ते सर्व गणितज्ञंही त्याच्या सोबत आलेले आहेत. कुणालाही त्याच्या प्रश्नाचे उत्तर सापडत नाही. आणि त्या मेयरकडे वेळ फार कमी आहे म्हणे."

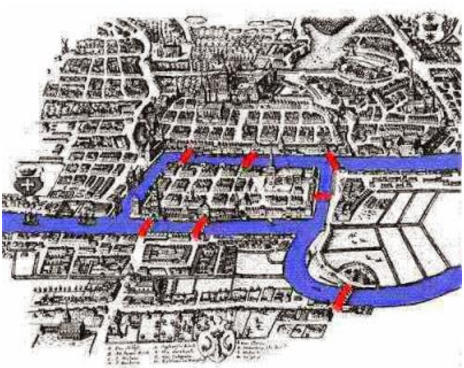
"कुणालाही सोडवता येत नाही?" ऑयलरचा चेहरा उजळला.

"कुणालाही नाही, सर...."

मेयर आतूनच ओरडला. "मी सर्व प्रयत्न करून पाहिलेले आहेत. कोनिग्सबर्गच्या परेडसाठी आता फक्त तुझ्यावर माझा भरवसा आहे......"

ऑयलरचा जन्म स्वित्झर्लंड येथे झाला होता. व शिक्षण जर्मनीत झाले होते. सेंट पीटर्सबर्गला यायच्या अगोदर तो स्वित्झर्लंड येथील बेसिल विद्यापीठात शिकत होता. तेथेच प्रसिद्ध शास्त्रज्ञ, बेर्नुलीच्या संपर्कात आला.

आणि बेर्नुलीच्या शिफारशीमुळेच त्याला सेंट पीटर्सबर्ग विद्यापीठात संशोधन करण्यास वाव मिळाला. व बेर्नुलीच्या निवृत्तीनंतर तो गणिताचा प्राध्यापक झाला.



महापौराचे वक्तव्य ऐकल्यानंतर त्याला हसू आवरेना.
"आताचे जर्मन गणितज्ञ काही कामाचे नाहीत."
रशियन विद्यार्थीसुद्धा हसू लागले. मादाम ब्रोव्हिन्स्कीला जवळ बोलावून, "त्या मेयरला येथे पाठवून दे. समस्या तरी काय आहे, ते बघू या."
उंचापुरा, दांडगा, अंगावर फरचा भला मोठा कोट व फरची टोपी घातलेला, धपाधप पावले टाकत मेयर थेट टेबलापाशी जाऊन थांबला. टेबलावरील सगळी पुस्तकं एका बाजूला ढकलून हातातील नकाशा पसरू लागला. ऑयलरकडे वळून, "हे बघा..." मध्येच त्याचे शब्द अडखळले. ऑयलरच्या डोळ्याकडे बघितल्यावर त्याला त्याची चूक उमगली. शरमिंदा होत, "सॉरी, माझ्या लक्षातच आले नाही की....."ऑयलरच्या ओठावर स्मित होते. थोडेसे हसतच, "मेयर तुम्ही तुमची समस्या मांडा. माझा मेंदू ताबडतोब या गोष्टी लक्षात ठेवू शकेल. व त्यातील गणितावर मी माझे लक्ष केंद्रित करू शकेन."

"खरोखर!" एक विद्यार्थी हळूच म्हणाला. "कुठलीही गुंतागुंतीची समस्या असो वा समीकरण असो, सर्व काही डोक्यात ठेऊनच सॉल्व करतात. कागदावर प्रश्न उतरवून काढेपर्यंत त्यांचे उत्तर तयार झालेले असते."

मेयर ऑयलरला समस्या समजावून सांगू लागला.

"कोनिग्सबर्ग येथे दोन नद्यांचा संगम होऊन प्रेजेल ही नदी वाहते. ही प्रेजेल नदी वाहताना तेथे एक बेट तयार झालेले आहे. व त्या पलीकडे एक द्वीपकल्प.आहे. पहिले बेट व्यापारी केंद्र आहे व दुसऱ्या द्वीपकल्पावर जुनी वस्ती आहे. कोनिग्सबर्ग शहर नदीच्या दक्षिणेला व उत्तरेला पसरलेले आहे. बेटावरून शहरात य़ेण्याजाण्यासाठी सात पूल आहेत. दोन दक्षिणेच्या बाजूने, शहराच्या मध्यभागासाठी, दोन उत्तरेच्या बाजूने शहरात प्रवेश करण्यासाठी, दोन पूल जुन्या वस्तीसाठी व एक व्यापारी केंद्रावरून सरळ जुन्या वस्तीत प्रवेश करण्यासाठी ब्लॅकस्मिथ्स ब्रिज, कनेक्टिंग ब्रिज, ग्रीन ब्रिज, मर्चंट्स ब्रिज, वूडन ब्रिज, पाय ब्रिज व हनी ब्रिज, असे सात पूल आमच्या पूर्वजानी बांधलेले आहेत. "

"ऑयलर त्याला मध्येच थांबवत, "मेयर, मला तुझ्या शहरातील नदी, बेटं, व पूल यांची कल्पना करता येते. पीटर, हे सर्व फळयावर काढून दाखव. मेयर, तुझी समस्या तरी काय आहे?"

"या शहराची स्थापना होऊन 1000 वर्ष झाली. पुढच्या महिन्यात या सहस्रकाचा समारंभ करण्याचा विचार आहे. आख्यायिकेप्रमाणे त्यादिवशी बँड पथकाबरोबर एक परेड निघते. व ही परेड साती पुलावरून जायला हवी. यासाठी फक्त एक अट आहे. ही परेड प्रत्येक पुलावरून फक्त एकदाच जायला हवी. व शहरातून दोन्ही बेटांवर व पुन्हा शहरात यायला हवी. परंतु असे कधी झाले आहे का व होत नसल्यास का होत नाही याचे मला उत्तर हवे. "

मेयर अक्षरशः तेवढ्या थंडीतही घामाघूम झाला होता.

ऑयलर विद्यार्थ्यांना उद्देशून
"हे तुमच्यासाठी गणित आहे. तुम्हाला काय वाटते? हे शक्य होईल का?"
एक जण उठून म्हणाला, "बेटावर जाण्यायेण्यासाठी भरपूर पूल आहेत. त्यामुळे ही गोष्ट अवघड नाही."
"मी ही अट पाळून अनेक प्रकारे परेड घेऊन जाण्याचा प्रयत्न केला. परंतु ते शक्य नाही असे मला वाटते." अजून एकजण म्हणाला.
"आपल्याला प्रूफ हवे. केवळ अंदाज नको," ऑयलर गरजला. "पुलांच्या संख्येमुळे वा जमिनीच्या विभागणीमुळे की या दोन्हीमुळे याचा शोध घ्यायला हवा. आपल्याला हे सर्व सैद्धांतिक स्वरूपात मांडता येईल का याचाही विचार करायला हवा. त्यामुळे पुलांची संख्या वा जमिनीच्या तुकड्यांची संख्या अप्रस्तुत ठरतील."

प्रोफेसर ऑयलर शांतपणे खुर्चीवर बसून राहिला. अशा वेळी सर विचार करत असतात, हे विद्यार्थ्यांना माहित होते. काही वेळानी दीर्घ श्वास सोडत ऑयलर उभे राहून "मेयर, मला तुझ्या या समस्येतील मूलभूत गोष्टी लक्षात येत आहेत. पीटर्सबर्ग येथे तू केठे राहतोस तो पत्ता माझ्या सेक्रेटरीकडे देऊन ठेव. उत्तर त्याच ठिकाणी पाठवतो."

मेयर आश्चर्यचकित होत, "तुम्ही हे सॉल्व करणार..".
"यात काय संशय? मेयर, आता आम्ही इन्फायनेट सीरीज समजून घेत आहोत. मी तुम्हाला कळवतो." असे म्हणत तो निरोप घेऊ लागला.

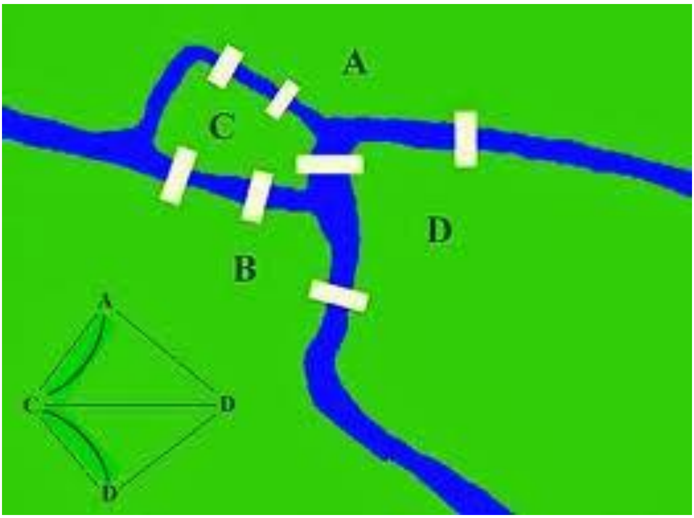
तीन दिवसानंतर मेयर गुंटर्लिंगला बोलावण्यात आले.
"मेयर, तुझे काम झाले. तुझ्या जर्मन गणिती मित्रांना तुम्हाला गणित येत नसल्यास रशियाला पाठवून द्यायला सांग. रशियन्स कुठलेही गणित सोडवू शकतात."

रशियन विद्यार्थी स्तुतीमुळे हुरळून गेले. मेयरचा चेहरा लालबुंद झाला होता.

"या समस्येचे उत्तर पूल किती आहेत यावर अवलंबून नसून जमिनीची विभागणी (लँडमास) कशी झाली आहे यावर अवलंबून आहे. येथील जमिनीची विभागणी A, B, C व D असे झाली आहे

असे समजू या. A, व्यापारी केंद्र असलेले बेट, B दक्षिणेकडील शहराचा भाग, C जुनी वस्ती आणि D उत्तरेकडील शहराचा भाग.''

पीटर यानी या नोंदी बोर्डावर केल्या.



"आता A पासून B ला कुठल्याही पुलावरून पार केले तरी त्याला आपण AB म्हणू या. एक पूल ओलांडला की 2 अक्षरं खर्ची घालू या. तेथून C वर गेल्यास ABC (2 पूल ओलांडल्यामुळे 3 अक्षरं..) " ऑयलर क्षणभर थांबला. मेयरचा खांदा हलवत, "काही लक्षात येते का?"

"हो. परंतु आपण परेड घेऊ शकू का?"
ऑयलर थोडेसे हसतच, "जरा दम धर. पहिल्यांदा गणित, व नंतर परेड. तर आता आपण एकेक पूल ओलांडून - वा n पूल ओलांडून n+1लँडमासवर जाऊ शकतो. यासाठी A वा B, कुठूनही सुरुवात केली तरी फरक पडणार नाही. आपण याचप्रमाणे प्रत्येक लँडमाससाठी हा तर्क वापरू शकतो. A जमिनीसाठी 2n पूल असल्यास (2n ही संख्या नेहमीच सम असते) A साठी n किंवा n+1 वेळा - A वा इतर ठिकाणाहून - जावू शकतो. "
"आपण परेड घेऊ शकू का?" मेयरचा प्रश्न.
"मला माझे म्हणणे अगोदर मांडू दे. जर लँडमास विषम संख्येत - (2n+1) - असलेल्या पुलांनी जोडलेले असल्यास लँडमासची संख्या n+1 असायला हवी. येथे तुम्ही कुठल्या पुलापासून सुरुवात करणार याला बंधन नाही. आता आपण लँडमास व पुलांची संख्या यांचा ताळमेळ घातल्यास आताच्या समस्येतील सात पुलांना 8 वेळा लँडमासला जोडावे लागेल. किंवा पुलांची संख्या एकने कमी किंवा जास्त करावे लागेल. "
"मी परेडची व्यवस्था करू का?" मेयर अस्वस्थ होत ओरडला.
"मी प्रथम गणितज्ञांच्या प्रश्नाला उत्तर देत आहे." थंडपणे ऑयलर सांगू लागला. "परेड घ्यायचे की नाही हे तू ठरव. यातील कळीचे मुद्दे पुलांची संख्या व लँडमासची संख्या ठरतील."
"मी परेड घेऊ शकेन का?" मेयर किंचाळला.
ऑयलर सौम्य आवाजात, "नाही.." म्हणून सांगितला. क्षणभर मेयर गुटर्लिंगला काय करावे हे कळेना. तोही खालच्या आवाजात, " नाही...?" असे विचारला.

"तुझ्याकडे चार लँडमास आहेत व विषम संख्येत पूल आहेत. तुला पुलावर दोनदा जायचे नाही या अटीवर परेड घ्यायचे असल्यास एक नवीन पूल तरी बांधावे लागेल वा एका पुलाचा वापर तरी टाळावे लागेल."

मेयर अक्षरशः रडकुंडीला आला. व टेबलावरील नकाशा गोळा करून पाय आपटत बाहेर पडला.

****

मेयरच्या या समस्येमुळे गणितशास्त्रात टोपोलॉजी या नवीन शाखेची भर पडली. भूमितीतील ही उपशाखा आकार व परिमाण यावर विसंबून नसते. टोपोलॉजीत कुठलेही कल्क्युलेशन्स वा मोजमाप नाहीत. येथे वस्तू कशा प्रकारे ठेवल्या जातात व त्यांच्या स्थानमानात बदल केल्यास काय परिणाम होऊ शकतो याचा अभ्यास केला जातो. आजकाल टोपोलॉजी ग्राफ थेअरी म्हणून ओळखली जाते.

कोनिग्सबर्गच्या परेडचे काय झाले व रशियन विद्यार्थी खरोखरच हुशार होते का, हा एका लेखाचा वेगळा विषय होऊ शकतो, हे मात्र नक्की.

●●●

थेंबे थेंबे तळे साचे

जेव्हा गणितातील एखादी समस्या सहजासहजी सुटत नसते वा निरीक्षणाशी सुसंगत नसते किंवा अतर्क्य वाटते तेव्हा गणितज्ञ एखाद्या नवीन संकल्पनेला वा संज्ञेला वा एखाद्या नवीन तंत्राला जन्म देत असतात व त्या समस्येचे उत्तर शोधण्यात यशस्वी होतात. उदाहरणार्थ, 1992 साली अतीवास्तव (surreal) संख्यांचा शोध अनंताच्या पलिकडे काय असू शकेल या प्रश्नाच्या उत्तरासाठी झाला. अजूनही वैज्ञानिक या संज्ञेविषयी वा त्याच्या वापराविषयी गोंधळलेले आहेत. अनेक वेळा वैज्ञानिकांची निकड म्हणूनसुद्धा काही नवीन गणितीय संकल्पनांची भर पडते. त्या त्या कालखंडातील गणितीय नियम, तत्व, सिद्धांत इत्यादींचा वापर करूनही समस्या सुटण्याची चिन्हं नसल्यामुळे नवीन प्रकारची रीत, पद्धत वा संख्या यांची भर पडत असावी. कल्पित संख्यां (imaginary numbers) याच सदरात मोडतात.

$x^2 = -4$ हे समीकरण सोडवण्यासाठी कल्पित संख्याचा वापर करावा लागला.(- गुणिले -) हे + असल्यामुळे संख्येचा वर्ग कधीच उणे असू शकत नाही. परंतु $x^2 = -4$ हे समीकरण कसे सुटणार? त्यासाठी 'i' ही संकल्पना राबवण्यात आली.

आयझॅक न्यूटनलाही (Isaac Newton) अशाच प्रकारचा प्रश्न पडला होता. चंद्र पृथ्वीभोवती व पृथ्वी सूर्याभोवती भ्रमण करत असतानाचे बल व त्या बलाचे नियंत्रण यावरून त्यानी गुरुत्वाकर्षणाचे नियम 1660च्या सुमारास शोधून काढले. हे नियम आजही विज्ञान व अभियांत्रिकीत वापरात आहेत.

परंतु या नियमांचा वापर करताना त्याला एका समस्येचा सामना करावा लागला. त्या काळचे गणितीय सिद्धात, रीत व नियम वापरून चंद्र, पृथ्वी व सूर्य यांच्यातील गुंतागुंतीच्या परस्पर बलांचे प्रमाण व गतीतील बदल नेमकेपणाने सांगता येत नव्हते. किती बल लागेल याचा त्याला अंदाज होता.

व त्या एकमेकात गुंतलेल्या असून ग्रहांच्या गतीचे नियंत्रण त्या करत आहेत हेही त्याला माहित होते. परंतु गणितीय सूत्रातून हे बल व गती किती आहेत हे आकड्यामधून सांगण्यास तो असमर्थ होता. अशा प्रकारच्या गणितीय समस्यासाठी त्याला एका नवीन साधनाची गरज भासत होती. यासाठीच त्यानी कॅल्क्युलसचा शोध लावला. याचीच ही एक काल्पनिक कथा. (कॅल्क्युलसचा शोध फ्रेंच गणितज्ञ लेब्निट्झ यांनी लावला की न्यूटन या वादात न पडता न्यूटनने याचा शोध लावला या गृहितकावर ही कथा आधारलेली आहे.)

" आयझॅक अंकल, तुम्ही अजूनही बाहेरच बसून आहात!"

त्या बागेतील झाडाझुडपात मोठ्या प्रमाणात फुलपाखरं उडत होत्या. आयझॅक बागेत स्वस्थ बसून होता. निळ्या आकाशात अधून मधून ढग जात होते.

"जोश, मला येथे बसणे फार आवडते. शांतही आहे. व विचार करत बसण्यास चांगली जागा आहे. "

"अंकल, तुम्ही पूर्ण भिजला आहात. सकाळी पाऊस येऊन गेला."

गणित व विज्ञान या विषयांचा 23 वर्षाचा हा प्राध्यापक स्वतःच्या ओल्या कपड्याकडे बघत

"खरच की. मी भिजलो आहे."

खरे पाहता न्यूटन 23 वर्षापेक्षा वयाने आणखी लहान आहे की काय असे वाटत होते.

"मी येथे बसलो आहे कारण मी एक समस्या सोडवत आहे."

"पुन्हा तेच! अंकल, तुम्ही माझ्याबरोबर खेळायला येणार की नाही?"

आयझॅक न्यूटनचा आठ वर्षाचा भाचा, जोशुआ मार्श, हा उत्साही, खेळकर, खोडकर मुलगा होता. कायम काही ना काही प्रश्न विचारून मामाला भंडावून सोडत होता.

"अंकल, आई व तिच्या मैत्रिणी तिकडे गप्पा मारत आहेत. त्यातील एका

आँटीने तुम्हाला खेळ-बीळ, मौज - मजा करता येत नाही असे म्हणत होती. मलाही तसेच वाटते. तुम्हाला फक्त विचार करत बसण्यास आवडते. बरोबर?"
भाच्याच्या डोक्यावरील केसात हात फिरवत
"आता मी एका मोठ्या समस्येचा विचार करत असून त्याचे उत्तर मला सापडत नाही."

इसवी सन 1666. संपूर्ण इंग्लंडमध्ये प्लेगची साथ पसरली होती. खेड्यांच्या तुलनेत शहरात त्याचा प्रादुर्भाव मोठ्या प्रमाणावर जाणवत होता. म्हणूनच शहरवासी शहर सोडून खेड्यात राहू लागले. सर्व विद्यापीठानी सुट्टी जाहीर केली होती. आयझॅक न्यूटनसारखे अनेक प्राध्यापक शहरातून बाहेर पडून खेडेगावात राहू लागले. खेड्यातील वातावरणात प्लेगची तीव्रता तेवढी जाणवत नव्हती. न्यूटन वूल्सथॉर्प या खेडेगावात राहणाऱ्या बहिणीकडे राहायला आला होता.

एक लांब उडी टाकून जोशुआ मामाच्या जवळ येऊन ओल्या गवतावर बसला. "अंकल आयझॅक, तुम्ही आता कशाबद्दल विचार करत होता?"
"चंद्राबद्दल..."
"पुन्हा चंद्राबद्दल? चंद्राजवळ पृथ्वीला धरून ठेवण्यासाठी गुरुत्वाची एक अदृश्य दोरी आहे असे तुम्हीच म्हणाला होतात ना?"
हसत हसत "अरे वा तुला हे सर्व आठवते.." न्यूटन उद्गारला.
"मला माहित आहे की तुम्ही हसू शकता, मजा करू शकता... "
"जोश, मला चंद्राच्या प्रदक्षिणेसाठी कुठून बल मिळत असेल याचा अंदाज आहे. परंतु.... "
आयझॅक उसासे टाकत आकाशातील ढगाकडे बघत म्हणाला,
"परंतु, त्या बलाचा परिणाम कसा होतो याचे वर्णन मी करू नाही."
"तुम्ही मला ते सांगू शकता का?"

"मला त्या बलांचा कशाप्रकारे परिणाम होतो हे गणिताच्या स्वरूपात वर्णन करून सांगायचे आहे. परंतु बीजगणितातील समीकरणांचे मर्यादा आहेत. हे बीजगणित मला आपण एखादे पेंटिंग बघितल्याप्रमाणे या क्षणी काय होते एवढेच सांगू शकते. ते एक स्थिर चित्र असते."
जोशुआचा चेहरा उजळला. "मला पेंटिंग बघायला फार आवडते... "
"बीजगणिताप्रमाणे पेंटिंगसुद्धा एखादा धावपटू पळत असल्यास फक्त त्यातील एका क्षणाचे चित्र रंगवते. पळणाऱ्याच्या चेहऱ्यावरील भाव व हाता-पायांची त्या क्षणी असलेली स्थिती त्या पेंटिंगमधून कळतात. परंतु तो किती वेगाने पळत आहे, कुठे कुठे वळण घेत आहे इ.इ. बारकावे त्यातून कळणार नाहीत. आणि मला नेमके याच गोष्टी हव्यात. "
जोशुआच्या आकलनापलीकडील हे विधान होते. त्याला काहीही अर्थबोध झाला नाही. मख्ख चेहरा करत,
"अंकल तुम्हाला चंद्रावर पळणाऱ्या धावपटूचे चित्र काढायचे आहे की काय?"
"जोश, चंद्रावरील बलांचे गणितीय चित्र मला हवे आहे. ... " तो नंतर स्वतःशीच बोलत असल्यासारखे पुटपुटू लागला, "बलप्रयोगातून गती... गतीतून वेग.... प्रवेग... "
"बल म्हणजे काय?"
"एखाद्या वस्तूला पुढे ढकलणे वा मागे ओढणे. परंतु जोश...."
"गती म्हणजे काय, अंकल?"
न्यूटन उसासे टाकत, "गती म्हणजे हालचाल, चलन...."
"ओह, म्हणजे आपण जेव्हा ढकलतो, तेव्हा ते हलते."
"हो. जोश परंतु...."

"यात कसले आले गणित? मलासुद्धा हे माहित आहे."
अभिमानाने जोश सांगू लागला.

न्यूटनला हे सर्व कसे समजाऊन सांगावे हे सुचत नव्हते. आकाशात ढग जमा होत होत्या. बल गतीत बदल घडवते. हीच तर समस्या आहे. न्यूटन बाहेरच्या जगापासून अलिप्त होत स्वतःच्या विचारात पार बुडून गेला.
"बीजगणित गती सूचित करू शकते. परंतु गतीत बदल होत असल्यास या समीकरणांचा उपयोग होत नाही. अवकाशातील स्थान, वेग व वेगातील बदल टिपणारा प्रवेग हे सर्व एकाच वेळी गणितातून मी कशा प्रकारे व्यक्त करू शकतो? "
"प्रवेग म्हणजे काय, अंकल?"
न्यूटन दचकला. कारण हा प्रश्न त्याला अपेक्षित नव्हता. तेही एका चिमुकल्या मुलाकडून. तंद्रीतून बाहेर पडत,
"प्रवेग म्हणजे, जोश.... न्यूटन एक क्षणभर थांबून, तेथे तुला सफरचंदाची दोन झाडं दिसतात का?", संकल्पना समजावण्याच्या सुरात सांगू लागला. जोश होकार देत होता.
"तू तेथे जा. व त्या झाडाभोवती काही वेळ फेऱ्या घाल... "
"गंमतच आहे... " जोशुआ पुटपुटत पळू लागला.

त्याचे बूट ओल्या गवतात अडकत होते. तरीसुद्धा धडपडत तो झाडाजवळ पोचलासुद्धा.. झाडाभोवती फेऱ्या मारत असताना तो न्यूटनकडे पाहत होता. न्यूटन जोराने ओरडत, "जरा जोराने पळ, जोश.... " नंतर काही वेळाने, "जरा हळू पळ... " असे काही वेळा जोराने पळायला व काही वेळा हळू पळायला अंकल सांगत होता. जोशला मजा वाटत होती. काही वेळाने धापा टाकत ओल्या गवतातून पळत पळत जोश मामाकडे आला. जोराने पळणे व नंतर हळू पळणे यातच प्रवेग आहे.

कपड्यावरील चिखल काढत व तोंड पुसत असलेल्या जोशुआला यातले काही कळले नाही.
"मला कंटाळा आला आहे, अंकल. पुढच्या वेळी हे सर्व मला पुन्हा एकदा शिकवा," असे म्हणत जोश खेळण्यासाठी पळत पळत गेला. जोशुआचा गोंधळ बघताना न्यूटनला हसू आवरेना. जोशुआने इतके वेळ केलेली कृती त्याला आठवत होती. त्या कृतीचे विश्लेषण तो करू लागला.

एक छोटासा तुकडा.... लहानसा तुकडा.... वक्र रेषेचा अगदी लहानसा भाग सरळ रेषेसारखाच दिसणार. प्रवेग वक्र रेषेत दाखवत असल्यास त्याचा लहान तुकडा सरळ रेषेसारखाच दिसणार. वेगाच्या सरळ रेषेप्रमाणेच हा लहान तुकडा दिसणार. बीजगणित केवळ गुंतागुंतीच्या मोठ-मोठ्या समस्यांकडे लक्ष देते. व संपूर्णपणे अर्थबोधही त्यातून होत नाही. मी जर लहान लहान तुकड्यांकडे लक्ष दिल्यास या समस्येला कदाचित उत्तर मिळू शकेल.

आकाशात विजा चमकू लागल्या. ढगांचा कडकडाट ऐकू येऊ लागला.
"जोश, आपल्याला घरी परतायला हवे. पाऊस येईल."
"मी आई व आँटीबरोबर गप्पा मारत बसू का?"
"जरूर. तू मला विचार करण्यासाठी चांगली कल्पना दिलेली आहेस."
जोशची छाती किंचित फुगली.
"मी तुम्हाला कल्पना दिली...?"
कडेवर हात ठेऊन जोश अंकलकडे बघू लागला.
"जोश, पावसाचे थेंब पडू लागले. पटकन चल."
"अंकल, थँक्यू म्हणा. कुणी काही दिल्यास थँक्यू म्हणायला पाहिजे असे आई सांगते."
न्यूटन हसत हसतच "थँक्यू जोश. ही कल्पना कशी काम करते हे तुला सांगेनच."

पावसाचे थेंब मोठ मोठे होऊ लागले. पाऊस जोराने पडू लागला. दोघेही पळतच सुटले. हॉलमध्ये जोशचे आई - वडील, मित्र - मैत्रिणी गप्पा मारत होत्या. जोश त्यांच्या हसण्या - खिदळण्यात सामील झाला. न्यूटन बाजूच्या जिन्यावरून अभ्यासिकेत शिरला. अभ्यासिकेतील खिडकीच्या काचामधून पावसाच्या ओघळणाऱ्या थेंबाकडे पाहत उभा राहिला.

विश्लेषणाचे तुकडे करायचे म्हणजे नेमके काय करायचे? कशाचे तुकडे...? किती तुकडे? तुकड्याचे काही मोजमाप..?बीजगणितातील समीकरणं असे तुकडे करू शकतील का? अशी एखादी रीत खरोखरच अस्तित्वात असेल का?... असले अनेक प्रश्न त्याच्या डोक्यात काहूर माजवू लागले.

बाहेर धोधो पाऊस पडत होता. खालून हसण्याचा गप्पांचा आवाज ऐकू येत होता. परंतु न्यूटनच्या डोक्यात कल्पना साकार होऊ लागली. या संकल्पनेच्या बाजूच्या व विरोधाच्या मुद्द्यावर तो विचार करू लागला. बारीक बारीक तुकडे...मी जर समस्येचे हळू हळू वाढत जाणाऱ्या तुकड्यात विभागणी केल्यास - increamental पद्धत वापरल्यास - बीजगणिताचे नियम वापरून चंद्रभ्रमण मार्ग, पृथ्वीभोवती फिरतानाचे वेग, वेगात होणारे बदल, पृथ्वी, चंद्र व सूर्य यांचे एकमेकावरील बलप्रयोग यांचा मी नक्कीच अंदाज घेऊ शकेन. खरे पाहता मला ढोबळ अंदाज नकोत. नेमके आकडे हवेत. परंतु इन्क्रिमेंट जितके लहान असतील त्याप्रमाणात यांची संख्याही भरपूर असेल. जेव्हा त्यांची बेरीज केली जाईल तेव्हा त्यातील चुका फारच कमी असतील. जितके लहान इन्क्रिमेंट तितके अचूक उत्तर! तरीसुद्धा हा अंदाजच असेल. परंतु नेमक्या उत्तराजवळ पोचवणारा हा अंदाज असेल!

हा नवीन विचार त्याला स्वस्थ बसवून देत नव्हता. बाहेरची वीजच त्याच्या अंगात संचारल्यासारखे त्याची अवस्था झाली. बीजगणितीय संकल्पना वापरून शून्यलब्धी (infinitesimal) असलेले अनंत तुकडे करून उत्तर

शोधत असल्यास समस्या नक्कीच सुटेल, हा आत्मविश्वास त्याच्याकडे होता. परंतु हे करायचे कसे?

यापूर्वीच्या गणितज्ञांनी हे केलेही असेल. असे तोंडाने पुटपुटत तो पुस्तकाच्या कपाटापाशी गेला. अर्किमिडीस, गॅलिलिओ, केप्लर, कार्डानो, फेर्मा, ह्युजेन्स आणि इतर अनेक ग्रीक वा रोमन गणितज्ञांची पुस्तकं येथे होत्या. एकेक पुस्तक बाहेर काढून ठेवू लागला.

"अंकल, तुम्ही काय करत आहात?" जोश दरवाज्यातून डोकावत विचारला.

"गणित.."

"नाही. तुम्ही काही तरी वाचत आहात. एका तासापूर्वी मी तुमच्या जेवणाचे ताट येथे आणून ठेवल्यापासून तुम्ही वाचतच आहात."

थंड झालेल्या ताटाकडे बघत न्यूटन आश्चर्यचकित झाला.

"मी वाचनाच्या नादात हे विसरूनच गेला होतो. यापूर्वीच्या गणितज्ञांनी काय शोध लावला, कसा शोध लावला, यातच मी बुडून गेलो होतो. "

जोशुआ टेबलावर हात टेकत व टेबलावरील एका पुस्तकाची पानं चाळत "यात एवढे मन लावून वाचण्यासारखे काहीही नाही."

"जोश, हे सगळे फारच गंमतीशीर आहे. यापूर्वीच्या गणितज्ञांना अनेक गोष्टी माहित होत्या. परंतु प्रत्यक्ष व्यवहारात त्याचा वापर होतो की नाही याची त्यांना कल्पना नव्हती. हेच बघ की. इन्क्रिमेंट्सची संकल्पना व बीजगणितातील समीकरणं वापरून ते समस्येचे उत्तर शोधत होते. परंतु त्यांच्यासमोर उत्तर बरोबर आहे की चूक हे समजून देणारी वास्तवातील समस्याच नव्हती. त्यामुळे त्यांना शेवटपर्यंत त्यांची रीत बरोबर की चुकीची हो कळलेच नाही. सुदैवाने आज माझ्यासमोर अशी एक समस्या आहे. चंद्र पृथ्वीभोवती प्रदक्षिणा घालत असताना गतीच्या नियमानुसार बलाचा प्रयोग होत असतो. (F=ma) infinitesimalचा शोध लावलेल्या या पूर्वीच्या गणितज्ञांना अशा प्रकारचे

बल वा गती असतात याची कल्पनाच नव्हती. त्यामुळे वास्तवात त्याचा वापर ते करू शकले नाहीत."

" infinitesimal म्हणजे काय?"

"जोश, मी तुला ते दाखवतो. या कागदाचे दोन तुकडे कर. परत दोन दोन तुकडे कर. कागदाचे तुकडे लहान झाले की नाही?"

"अंकल, खरोखरच लहान झाले. हे अगदीच सोपे आहे. "

"परंतु हे infinitesimally लहान आहेत का?"

"मला यातले काही कळत नाही, " जोशुआ

"नाही. हा तुकडा लहान नाही. लहानाच्या जवळपाससुद्धा नाही. अजून त्याचे तुकडे कर. अजून कर, अजून कर.... "

"अंकल, हे फारच लहान तुकडे आहेत."

दोन्ही बोटांच्यामध्ये एक तुकडा दाखवत जोश म्हणाला. "अंकल, हा तुकडा infinitesimal असेल का?"

"माहित नाही. परंतु अजूनही जवळपास नाही. अजून पाच - सहा वेळा तुकडे कर."

"पाच -सहा वेळा... " डोळे विस्फारत जोश विचारत होता.

"त्याच्यानंतर दहा वेळा...."

"मला तुकडा दिसणारही नाही.... "

"तुला तो तुकडा दिसतो असे समज. त्याचे हजार तुकडे कर. त्यातील एका तुकड्याचे पुन्हा हजार तुकडे कर. "

जोशुआ घाबरला. "अंकल, हातात काहीच नसणार...."

न्यूटन हसतच म्हणाला, "अगदी बरोबर. .... अगदीच नसणार असे नव्हे. परंतु नसण्याच्या अगदी जवळपर्यंत. व त्याचे मोजमापही करता येणार नाही इतके अत्यल्प... "

"अगोदरच सांगायचे नाही का अंकल, बघा, कागदाचे तुकडे करून घरभर कचरा केला मी...."
"तू मोठा झाल्यानंतर हे सर्व तुला शिकायचे आहे..."
मध्येच न्यूटनला तोडत, "मला माहित आहे, हे सर्व शिकावे लागेल. परंतु अंकल, जेव्हा मी एखादी गोष्ट प्रत्यक्ष करून बघतो तेव्हा मला काही तरी केल्याचे समाधान मिळते. आता मी हा कचरा स्वच्छ करू का?"
न्यूटन प्रेमाने जोशच्या केसात हात फिरवत "थंक्यू जोश, कचरा उचलून टाक. हे किती तुकडे आहेत याचा अंदाज आहे का? त्याची बेरीज करणे जमेल का? यानंतर आपल्याला कागदाचे एवढे बारीक तुकडे करत बसण्याची गरज भासणार नाही. मीसुद्धा समस्येच्या उत्तरासाठी असेच सूक्ष्मातीसूक्ष्म तुकडे करून त्यांची बेरीज करणार आहे."
"ती बेरीज संपायला कित्येक दिवस लागतील, अंकल."
न्यूटन हसत म्हणाला, "काही वेळातच ही बेरीज करता येईल. यासाठी मी एक नवीन प्रकारचे गणित शोधून काढणार आहे. अशा प्रकारच्या समस्यांसाठी ही समीकरणं सहजपणे वापरता येतील. "
"अंकल, तुमच्या गणितातील ही नवी रीत कचरा गोळा करणाऱ्या या केरसुणीपेक्षा नक्कीच चांगली असेल!"

***

अशा प्रकारे कॅल्क्युलस या गणित शाखेचा उदय झाला गणित शाखेचा उदय झाला. यात डिफरन्शियल व इंटिग्रल कॅल्क्युलस अशा दोन उपशाखा आहेत. न्यूटनने बेरीज करण्याची अगदी सोपी रीत शोधून काढली. आणि बेरजेसाठी लागणारा वेळही कमी झाला. नाहीतर केवळ बेरीज करण्यासाठीच आयुष्यभर खस्ता खाव्या लागल्या असत्या. infinitesimal इन्क्रिमेंटचे लाखो, करोडो तुकडे करत समस्याचे शोध घेणे यामुळे शक्य झाले.

कॅल्क्युलसच्या शोधामुळे आधुनिक भौतिकी, रसायनशास्त्र, सागरविज्ञान, खगोलशास्त्र वा जेथे जेथे अचूक अशा संख्यात्मक उत्तराची गरज भासते अशा विज्ञानशाखेतील अभ्यास फारच सोपा झाला.

***

या महान गणितज्ञाने गतीनियमांचा शोध लावला. त्यानी शोधलेले गतीनियम व गुरुत्व नियम यांचा वापर पुढील दोनशे वर्ष भौतिकी, अभियांत्रिकी, खगोलशास्त्र, रॉकेट डायनॅमिक्स इत्यादींच्या विकासासाठी केल्यामुळे मानवाने फार मोठी प्रगती केली. ऑप्टिक्स व सामान्य गणितासाठीसुद्धा त्याचे योगदान होते. त्यानी आपले सर्व संशोधन प्रिन्सिपिया मॅथेमॅटिका या प्रचंड ग्रंथातून प्रसिद्ध केले. यासाठी रोज 18 तास तो खपत होता व ग्रंथ पूर्ण करण्यासाठी दोन वर्ष लागली.

परंतु प्रिन्सिपिया मॅथेमॅटिका लिहित असताना या प्राध्यापक महाशयाचे वर्ग कोण घेत होते हा प्रश्न अनुत्तरीतच राहिला!

●●●

काळाच्याही फार फार पुढे..

प्रत्येक कालखंडात अलौकिक प्रतिभाशाली असे म्हणवून घेणाऱ्या काही व्यक्तींचा जन्म होतो व इतरांपेक्षा अत्यंत वेगळेच - व तेही बालवयापासून - ही प्रतिभा व्यक्त होत असते. अशा व्यक्तींना चाइल्ड प्रॉडिजी असे म्हटले जाते. अलिकडचेच उदाहरण घेतल्यास कुमार गंधर्वांचे गायकीतील प्राविण्य ते 8-10 वर्ष वयाचे असतानासुद्धा लक्षात येण्यासारखे होते. शकुंतलादेवीचे बालपणापासूनचे अंकगणितातील अनेक आकड्यांचा तोंडी गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ इत्यादींना काही क्षणातच काढून दाखवण्याचे कौशल्य आश्चर्यकारक वाटण्यासारखी गोष्ट होती. काही जण चित्रकलेतसुद्धा अशाच प्रकारची प्रतिभा दाखवलेला उदाहरणं इतिहासाच्या पानात सापडतील. विज्ञानातही अनेक चाइल्ड प्रॉडिजी *होऊन गेले आहेत. अगदी 13 व्या वर्षी शोधनिबंध लिहून डॉक्टरेट मिळवलेली उदाहरणंसुद्धा आहेत.*

गणिताचेच उदाहरण घ्यायचे ठरवल्यास 1811 साली फ्रान्समध्ये जन्मलेल्या एव्हरिस्ट गाल्व्हा (Everiste Galois) याचे मॅथेमॅटिकल प्रॉडिजी म्हणून सर्वात वरचा क्रमांक असू शकेल. याच्या संदर्भातील अत्यंत दुखद घटना म्हणजे वयाच्या विसाव्या वर्षी अगदीच क्षुल्लक कारणासाठी त्याचा झालेला मृत्यु. पिस्तूल शूटिंगच्या द्वंद्वयुद्धात कोवळ्या वयातील त्याच्या मृत्युमुळे गणित विषयातील कॉम्प्लेक्स संख्या व इतर अनेक गणितीय सिद्धांत जगापुढे येऊ शकल्या नाहीत, असे म्हणण्यास भरपूर वाव आहे. त्याचा अकाली मृत्यु होईपर्यंत त्याच्यातील बुद्धीमत्तेची कदर केली नाही. वेडसर मुलगा म्हणून त्याची हेटाळणी झाली व तो जे काही सांगत आहे त्याकडे पूर्णपणे दुर्लक्ष करण्यात आले. त्याचा मृत्यु टाळता आला असता. परंतु तथाकथित अभिजनांनी डोळेझाक केल्यामुळे गणितविश्वाचे फार मोठे नुकसान झाले, हे नाकारण्यात हशील नाही. गणिताच्या इतिहासाच्या पानी ही एक

हृदयद्रावक घटना म्हणूनच त्याच्या मृत्युच्या संदर्भाचा उल्लेख असेल. त्याचीच ही एक काल्पनिक कथा.

"रात्रीचे 10 वाजून गेले आहेत. सकाळ व्हायच्या आत मी मरून जाईन" गाल्व्हा,

"कदाचित तू मरणारही नाही", त्याचा सांत्वन करणारा मित्र.

अवघ्या वीस वर्षे वयाच्या गाल्व्हाला मित्राच्या शब्दावर विश्वास बसत नव्हता. उद्याचा मृत्यु अटळ आहे याची त्याला पूर्ण खात्री होती. पॅरिस शहराच्या उपनगरातील दुसऱ्या मजल्यावरील भाड्याच्या एका छोट्या खोलीत तो राहत होता. काय करावे ते सुचत नव्हते. नुसते येरझारा घालत होता. लाकडी फळयांची जमीन असल्यामुळे आवाज येत होता. गाल्व्हा एकदम हडकुळा, पाप्याचे पितर दिसत होता. मात्र डोळयात चमक होती. चेहरा अगदीच लहान मुलासारखा दिसत होता. डोळयात स्वप्नं होती. "मला नेम धरता येत नाही. मी काही शूटर नाही. मी गणितज्ञ आहे. आणि मला द्वंद्वयुद्धाला आव्हान देणारा सैन्यातील प्रशिक्षित शूटर आहे. मी कसा काय या युद्धात जिंकून जिवंत राहू शकतो?"

"काही वेळा नशीब साथ देत असते. नेम धरून मार. व होप फॉर द बेस्ट. "

28 वर्षे वयाचा ऑगस्ट शुव्हालिये (August Chevalier) हा गाल्व्हाचा जवळचा मित्र. या कठिण प्रसंगात मदत करण्यासाठी धावून आलेला. मित्राला शांत करण्यासाठी व शेवटच्या क्षणापर्यंत आशा सोडू नकोस हे सांगण्यासाठी तो त्याच्याबरोबर त्या शेवटच्या रात्री खोलीत होता.

"कदाचित तुझ्या प्रतिद्वंद्वीचा नेम चुकेल!"

गाल्व्हा मित्राकडे वळून, " हे आव्हान कुठल्याही प्रतिष्ठेसाठी नाही. येथे प्रतिष्ठा पणाला लावलेली नाही. किंवा एखाद्या प्रेमिकेचे मन जिंकण्यासाठीसुद्धा नाही. मुळात येथे कुठलीही तरुणी नाही. फक्त माझ्यावर दोषारोप केले जात आहेत.

मला ठार मारण्यासाठी कट रचला आहे. विनाकारण मला गोवण्यात येत आहे. यामागे राजाची माणसं आहेत. त्यांना मला संपवून टाकायचं आहे."
"मग द्वंद्वयुद्धाला तू जावू नको."
"मला जायलाच हवे. कारण त्यांनी मला उघड आव्हान दिलेले आहे. "
"कुठे तरी दूर जाऊन लपून बस. पळून जा"
"ती राजाची माणसं आहेत. पाताळातून हुडकून काढतील."
1832 सालचा मे 29 तारखेचा तो दिवस होता. गाल्व्हा राहत असलेल्या त्या उपनगरात दुपारी पाऊस पडला होता. रस्त्यात चिखल भरला होता. रस्त्यावरून जात असलेल्या घोड्यांचा आवाज, गाड्यांचा आवाज, जमलेल्या गर्दीचा आवाज एकमेकात मिसळल्या होत्या. गाल्व्हाचे डोके भणभणत होते. रस्त्यावर गॅस लँप्स मंद प्रकाश ओकत होत्या. गाल्व्हाच्या येरझारा थांबल्या. खिडकीतून आकाशाकडे बघत
"मी मेलो तर माझ्याबरोबरच माझे विचार व नवीन कल्पना मरून जातील. गणिताविषयीच्या अनेक कल्पना माझ्या डोक्यात आहेत. वयाच्या चौदाव्या वर्षीच बीजगणित हा विषय शास्त्रीय संगीतासारखा आनंद देणारा, रोमांचित करणारा विषय आहे, हे मला जाणवले. त्याचा अभ्यास करताना मला एक वेगळीच अनुभूती येत होती. ते नेमके काय, हे मी शब्दात पकडू शकत नव्हतो."
"मित्रा, आज आपल्या समोरचा प्रश्न गणिताचा नसून तुझ्या जीवन मरणाचा प्रश्न आहे. उद्याच्या शूटिंगमध्ये कोण जिकणार व कोण मरणार हा प्रश्न आहे." ऑगस्टची टिप्पणी.
"तस काही नाही! कल्पना फार महत्वाच्या असतात. आणि या कल्पना कुणी तरी आपले ऐकावे म्हणून धडपडत असतात."

गाल्व्हाचा चालण्याचा वेग वाढला. खोलीतच जॉगिंग करत असल्यासारखा तो धापा टाकत होता.

"मी बसत असलेल्या या खुर्चीप्रमाणे वा भोवती जे काही दिसते त्या प्रमाणे समीकरणं, त्यांचे फॅक्टर्स, समीकरणांची उत्तरं, समीकरणांचे गट माझ्या डोळ्यासमोर स्पष्टपणे दिसत असतात. हे गट मला मूळ समीकरणापर्यंत नेतात. हे गट नेमके काय आहेत ते मी शब्दाने वर्णन करू शकत नाही. या गटांचे पर्म्युटेशन्स व कॉम्बिनेशन्स मला सहजपणे करता येतात. माझ्या डोक्यातील कल्पनांना वाट करून द्यायलाच हवे. एखाद्या बंदिस्त तुरुंगात असल्यासारखे या कल्पना माझ्या डोक्यात बंदिस्त आहेत."

ऑगस्ट ताडकन कॉटवरून उठून उभी राहिला.

"गाल्व्हा, तू उगीच काही तरी बरळत आहेस.'' गाल्व्हाला धरून खुर्चीवर बसवत, ''तुझ्या कल्पना तू लिहून काढलेले आहेस ना मग काळजी कसली. त्या सुरक्षित आहेत. तूच म्हणत होतास की हे सर्व लिहून काढल्या आहेत म्हणून... इतर गणितज्ञांशीही तू बोलला असशीलच."

गाल्व्हा, "ओह, त्यांना मी पटवून सांगण्याचा भरपूर प्रयत्न केला. खरोखरच केला. परंतु काही उपयोग झाला नाही." त्याच्या चेहऱ्यावरून तो वैतागलेला आहे, हे स्पष्ट दिसत होते. "मी त्यांच्याशी वाद घातला, चर्चा केली, ओरडलो, विनवणी केली, चार शिव्याही दिल्या... एखाद्या लहान मुलाला कळेल या शब्दात मी माझ्या कल्पना कागदावर लिहून पाठवले. परंतु या फ्रेंच अकॅडेमी ऑफ सायन्स व विद्यापीठातील मूर्खांना कसे समजून सांगणार?"

"परंतु तुझ्या कल्पना लिहून ठेवलेला आहेस ना?" ऑगस्टचा प्रतिप्रश्न.

गाल्व्हा एका ठिकाणी स्वस्थ बसू शकत नव्हता. ऐकून न ऐकल्यासारखे करत तो झपाझप खोलीत चालू लागला. "ती सर्व मूर्खमंडळी मला पुढे जाण्यापासून अडवत आहेत. माझा सर्वनाश करण्याच्या प्रयत्नात आहेत. एकजात

सर्वजण.... परंतु माझ्यासाठी नसले तरी कल्पना काय आहेत हे तरी ऐकून घ्या म्हणाव...”

“....”

“गेली कित्येक वर्षे या कल्पना माझ्या मागे लागल्या आहेत. माझ्या डोक्यात येऊन आरडाओरडा करत आहेत. त्यांच्याकडे कुणी लक्ष देत नाहीत म्हणून तक्रार करत आहेत . कुणी ऐकत नाही म्हणून वैतागलेले आहेत. बाहेर पडण्यासाठी धडपडत आहेत. मला झोपू देत नाहीत. मला स्वस्थ बसू देत नाहीत. याचे मुख्य कारण म्हणजे माझे ऐकूनच घ्यायला कुणीही तयार नाहीत."

मित्राचे समाधान कसे करावे हेच ऑगस्टला कळेनासे झाले. त्याच्या मनातील भीती व राग कसे घालवायचे, हे त्याच्या लक्षात येत नव्हते. काही तरी बोलायचे म्हणून, "कुठल्या कल्पनांच्याबद्दल तू बोलत आहेस?" हा प्रश्न त्यानी विचारला.

गाल्व्हाच्या डोळयातून अक्षरशः पाणी येत होते. मित्राच्या या प्रश्नामुळे त्याला मन मोकळे करावेसे वाटू लागले. चेहऱ्यावरचे भाव बदलले. उत्साह संचारला. "म्हणूनच मी तुला आग्रह करून बोलवले. कुणीतरी माझे ऐकून घेतील हा उद्देश त्यामागे होता. मी तुला सर्व सांगणार आहे.”

"एव्हरिस्ट, मला गणितातले काही कळत नाही, याची कल्पना तुला आहे ना?"

गाल्व्हा मित्राच्या बोलण्याकडे दुर्लक्ष करत, "या कल्पना स्वतःच आपणहून स्पष्टीकरण देत असतात. अगदी लहान मुलांनासुद्धा त्या कळू शकतील."

"मी प्रयत्न करतो...."

"आपल्यातील बहुतेक जण बीजगणितातील समीकरणातील form व orderमध्ये बदल झाल्यास त्या सोडवता येतील की नाही याचा शोध घेत

असतात. माझ्या मते हा निव्वळ मूर्खपणा आहे. माझी पद्धत वापरल्यास त्यांना त्यांचे हे संशोधन थांबवावे लागेल, याची त्यांना भीती आहे. याचे साधे सरळ उत्तर गट सिद्धांतात (Group Theory) आहे. समीकरणांचे अवयव (factors) गटांची बांधणी करतात. या लोकांनी समीकरणाऐवजी गटांचा अभ्यास करावा.''

''गट म्हणजे काय, अवयव म्हणजे काय, हे काही मला समजत नाही.''

गाल्व्हा टेबलावर मूठ आपटत, ''मित्रा, जरा डोके चालव! मी काय सांगत आहे ते नीट ऐकून घे! हे सगळे फारच साधं, सरळं आहे. पर्म्युटेशन्स, कॉम्बिनेशन्स वा वेगळी रीत वापरून एखाद्या गटाची व्याख्या करता येईल, समीकरण सोडवता येईल की नाही हेही सांगता येईल. .... इतरांना हे का कळत नाही? अगदी साधी गोष्ट आहे. लहान मुलालासुद्धा कळू शकेल. ... "

ऑगस्ट डोळे चोळू लागला. " एव्हरिस्ट, पुन्हा एकदा समजाऊन सांग. मला कळेल. "

घड्याळाचे ठोके पडू लागले. रात्रीचे बारा वाजत होते. "बारा वाजत आहेत. अजून पाच तासानंतर मला त्या वैऱ्याशी झुंजावे लागेल. हे कशासाठी हेच मला कळेनासे झाले आहे. एका तरुणीच्या तक्रारीमुळे, असे मला सांगितले जात आहे. परंतु ते एक निमित्त मात्र. मुळात त्यांना मला संपवायचे आहे. माझ्या कल्पनांना मारून टाकायचे आहे. माझ्या कल्पनांची त्यांना फार भीती वाटत असावी." तो रडकुंडीला आला होता. "फक्त आजचीच ही रात्र.... "

ऑगस्ट गाल्व्हाला हळूच खुर्चीवर बसवला. "हे सर्व मला सांगण्याऐवजी तू लिहून का काढत नाहीस? तू लिहिलेले मी नंतर ज्यांच्याकडे पोचवावेसे वाटते, त्यांच्यापर्यंत पोहोचवितो."

"मित्रा, खरे आहे. हे मी अगोदरच करायला हवे होते. आता मला लिहून

काढायलाच हवे. डोक्यातले विचार व कल्पना बाहेर पडायला हव्यात. आज रात्री बसून लिहून काढतो."

गाल्व्हा तेथेच असलेले एक क्विल पेन व कोऱ्या कागदाचा गठ्ठा पुढ्यात घेऊन बसला. "परंतु आता हे सर्वच्या सर्व लिहून काढायला वेळ नाही. हे सर्व प्रमेय व सिद्धांत शिस्तबद्धपणे लिहून काढायला कित्येक महिने लागतील. त्यांचे प्रूफ काय आहेत, त्यांचे डेरिव्हेटिव्ह्स काय आहेत हे लिहिणे एवढ्या थोड्या वेळात शक्य होणार नाही. हे दोन – चार तासाचे काम नाही. तू त्यांना सांग की माझ्याकडे या सगळ्यांचे प्रूफ होते. कुणीही माझं ऐकणार नाहीत. मला आता लिहू दे."

"तुझं ऐकणारा एकही जण तुला भेटला नाही? कधीच भेटला नाही?"

"विश्वास ठेव अगर ठेऊ नको. फ्रेंच अकॅडेमी, विद्यापीठ, माझे टीचर्स, या सर्वांना – ऐक तरी - सांगण्याचा प्रयत्न केला. एक जात सर्व जण माझ्या विरोधात होते. त्यांना मुळात ऐकून घ्याचेच नव्हते."

"जावू दे, एव्हरिस्ट. एवढ मनाला लावून घेऊ नकोस. हे द्वंद्वयुद्ध तुझ्यावर कोसळलेला एक दुर्दैवी प्रसंग आहे. त्याचा फार बाऊ करू नकोस. तुला वाटते तसे त्यात काही कट कारस्थान नाही."

गाल्व्हाचे डोळे विस्फारले. हातातील पेन जोराने आपटत, "तुझा विश्वास बसत नाही? तूच मला सांग. मी, 17व्या वर्षी फ्रेंच विद्यापीठाच्या एकोले पॉलिटेक्निकच्या प्रवेश परीक्षेतील सर्व प्रश्नांची अचूक उत्तरं लिहिली होती. परंतु तोंडी परीक्षेत मी ते नीटपणे मांडू शकलो नाही म्हणून मला नापास करण्यात आले. प्रश्न एकदम फालतू होते. पेपरवर रीत मांडून गणित सोडवण्याऐवजी मी डोक्यातच सोडवून फक्त उत्तरं मांडत होतो. त्यावर त्यांचा विश्वास बसत नव्हता. व त्यांना त्याचा राग आला."

"त्याच वर्षी मी फ्रेंच अकॅडेमी ऑफ सायन्सेसला एक शोधनिबंध पाठवून

दिला होता. कॉशी (Cauchy) हा महान गणितज्ञ निबंध वाचून निर्णय देणार होता. मी फार खुश होतो. जेव्हा मी काही दिवसांनी त्याबद्दल विचारपूस करू लागलो तेव्हा त्यांनी निबंध वाचायचा आहे हे विसरून गेला म्हणे. दुसऱ्यांदा चौकशी केली, तेव्हा ते निबंध हरवले म्हणून मला सांगण्यात आले. मला ही गोष्ट कळवलीसुद्धा नाही. परंतु हे कसे शक्य आहे?"

"मोठा गणितज्ञ, कामाच्या व्यापात विसरला असेल…." ऑगस्ट अडखळत म्हणाला.

"ते जाऊ दे. हे कसे काय झाले? 18व्या वर्षी मी एकोले पॉलिटेक्निकच्या प्रवेश परीक्षेत दुसऱ्यांदा नापास झालो यावेळी मला माझे समर्थन करण्यासाठीसुद्धा संधी दिली नाही. तेथील परीक्षक मला चिडवत होते. माझी टवाळी करत होते. टिंगल करत होते. मी रडतच बाहेर पडलो."

"तू त्यांच्यावर बकेट फेकून मारला होतास म्हणे."

"बकेट नव्हे, फळा पुसायचा डस्टर. आणि त्यांना ती शिक्षा द्यायलाच हवी होती."

“19व्या वर्षी गट सिद्धांतावर एक अभ्यासपूर्ण शोधनिबंध लिहून फ्रेंच अकॅडेमी ऑफ सायन्सला पाठवला होता. अकॅडेमीच्या वरिष्ठ सचिवाच्या हातातच ते पोहोचण्याची व्यवस्था केली होती. याचा पुरावा माझ्याकडे आहे. परंतु पाकीट उघडून पाहत असतानाच त्याला हृदयविकाराचा झटका आला व दवाखान्यात त्याचा मृत्यु झाला. त्याचे प्रेत हलवायच्या आतच माझा शोधनिबंध गायब झाला होता. शोधनिबंध कुणीच वाचले नव्हते. हे कारस्थान नसेल तर दुसरे काय असू शकते?”

“परंतु हे कसे शक्य आहे...?” ऑगस्ट ततपप करू लागला.

गाल्व्हा त्याला मध्येच तोडत, “याच वर्षी मी अजून एक निबंध लिहून अकॅडेमीला पाठवून दिले. या वेळी प्रसिद्ध शास्त्रज्ञ पॉइस्सन (Poisson)हा त्या

निबंधाचा review करणार होता. परंतु निबंध वाचून काढायलाच त्यानी नकार दिला. त्यानंतर खोदून विचारल्यावर "मी निबंध वाचून काढलो, परंतु मला त्यातले काही कळले नाही," असे सांगितले. माझ्या मते तो चक्क खोटे बोलत होता. मला माहित आहे की त्यानी त्या निबंधाकडे ढुंकूनही पाहिले नव्हते. मला माहित आहे की त्यांना काही तरी करून मला संपवायचे आहे. माझ्या कल्पना गाडून टाकायच्या आहेत. परंतु कल्पनांना मरण नसते. विचार मरत नाहीत!"

ऑगस्ट सांत्वन करण्याच्या उद्देशाने "द्वंद्वयुद्धात फार फार तर तुला जखम होईल. मी तुला हॉस्पिटलमध्ये ताबडतोब घेऊन जाईन. पूर्ण बरा झाल्यानंतर तू पुन्हा एकदा हे सर्व लिहून काढ. तुला ज्याप्रकारे मांडणी करायचे आहे त्या प्रकारे कर. हवे तसे लिहून काढ. "

मित्राच्या खांद्यावर हात ठेवत, "कल्पनांना वाट करून द्यायलाच हवे. मी जिवंत राहीन की नाही याची मला खात्री नाही. या रात्रीच हे काम पूर्ण व्हायला हवे."

"परंतु प्रगत गणितातील रो की ठो मला कळत नाही. तू अंकगणितातील आकड्यांचा वापर करून सांगू शकशील का?" ऑगस्टचा बाळबोध प्रश्न.

गाल्व्हा हातात पेन घेऊन बसला. घड्याळाचे तीन ठोके पडले. "इतक्या लवकर तीन वाजलेसुद्धा! इतर रात्रीपेक्षा आजची रात्र इतकी भराभर का जात आहे?" मुठी आवळत त्रासिक चेहऱ्याने गाल्व्हा बडबडू लागला.

"डोक्यातील कल्पना भुणभुण करत आहेत. आरडा ओरडा करत आहेत. हे सर्व लिहून काढले पाहिजे व तेही आत्ताच! आणि मी ते लिहिणार... परंतु वेळ फार कमी आहे. प्रूफ, डेरिव्हेटिव्ह्ज त्यांचे स्पष्टीकरण लिहून काढायला वेळ पुरणार नाही. मी फक्त आता प्रमेयांची मांडणी करेन. त्याचे प्रूफ इतरांनी लिहू दे. प्रूफ मला स्पष्ट दिसत आहेत. परंतु मी जेव्हा सांगण्याचा प्रयत्न करतो तेव्हा

ते ऐकूनच घ्यायला तयार नसतील तर मी काय करू शकतो? त्यांच्यावर मी कसा काय विश्वास ठेऊ?"
"एव्हरिस्ट, ते जाऊ दे. तू आता तरी लिहून काढ."
एव्हरिस्ट भराभर लिहू लागला. लिहिलेल्या कागदांचा ढीग साचू लागला.
"मला वेळ पुरत नाही. मी काय करू...."
खिडकीतून तो बाहेर बघू लागला. अंधार हळू हळू अदृश्य होऊ लागले. अंधुकसा प्रकाश चोर पावलानी शिरू लागला. अरुणोदयाची चाहूल लागत होती. "हाच सूर्येदय मला मृत्युकडे नेणार. यानंतरचा सूर्योदय मी कधीच पाहू शकणार नाही." त्याचा आवाज क्षीण झाला होता. पुन्हा एकदा घड्याळाचे ठोके पडू लागले. दोघेही ताडकन उठून उभे राहिले. "वेळ झाली आहे. व माझे लिहिणे पूर्ण झाले नाही. अजूनही मला भरपूर काही सांगायचे आहे. परंतु वेळ नाही, जास्त वेळ हवा होता. .... वेळ हवा होता. ...."
तितक्यात दारावर टकटक आवाज आला. पहारेकरी ओरडून सांगत होता,
"वेळ झाली आहे, एव्हरिस्ट, तयार हो. वेळ झाली आहे...."

***

अंधार सरकत होता. सगळीकडे धुके पसरले होते. थंडी बऱ्यापैकी होती. 1832, मे 30ची सकाळ. 21 वर्षाचा एव्हरिस्ट गाल्व्हा पॅरिस शहराच्या बाहेरील एका छोट्या मैदानात रक्तबंबाळ होऊन पडला होता. ऑगस्ट शुव्हालियेच्या मांडीवर त्याचे डोके होते. निस्तेज डोळे आकाशात काही तरी शोधत होत्या. गाल्व्हा द्वंद्वयुद्धात हरला होता. काळपुरुषाबरोबरच्या युद्धातही तो हरला होता. दुसऱ्या दिवशी, 31 तारखेला दवाखान्यातील उपचाराच्या वेळी तो मेला. त्याला वेळ हवा होता. व तेच त्याला मिळू शकले नाही.

***

गोष्ट येथेच संपली नाही. 1870 साली, म्हणजे गाल्व्हाच्या मृत्युनंतरच्या 40 वर्षानंतर **कॅमिले जोर्डन** यानी त्या शेवटच्या कराळ रात्री गाल्व्हाने लिहिलेल्या सर्व प्रमेयांना प्रसिद्धी दिली. तोपर्‍यंत गणितातही भरपूर प्रगती झाली होती. गाल्व्हाला काय सांगायचे होते ते आता गणितज्ञांना कळू लागले. एका क्षुल्लक कारणामुळे अलौकिक प्रतिभाशाली असलेल्या व अकाली अंत झालेल्या या थोर गणितज्ञाच्या विधानांचा अभ्यास करत असताना युरोपियन गणितज्ञ आश्चर्यचकित होत होते. हेटाळणी केलेला देशच आता त्याची वाहवा करू लागली. गाल्व्हाच्या प्रमेयामुळे शतकानुशतके आहे त्याच स्थितीत खितपत पडलेल्या बीजगणिताचे स्वरूप बदलले. त्याचा कायापालट झाला. 20व्या शतकातील भौतिकी व रसायनशास्त्र यातील नवीन शोधांना गाल्व्हाच्याच सिद्धांताचा आधार मिळाला.

फक्त त्याचा अकाली मृत्यु झाला नसता तर....
हा जर तर चा प्रश्न असल्यामुळे य़ेथेच थांबणे इष्ट ठरेल.

●●●

इन्फिनिटीच्याहीपेक्षा मोठे ...

गणिताचा विकास हा एका दिवसात झालेला नाही. शेकडो वर्षे व हजारो गणितज्ञ यांच्या बौद्धिक श्रमाच्या फलितातून उत्क्रांत होत आलेला हा अभ्यासाचा विषय आहे. 4000 वर्षापूर्वीचे गणितीय नियम व सिध्दांत कुठलेही बदल न करता अजूनही वापरले जातात. यातच या विषयाचा थोरपणा अधोरोखित होतो.

जेव्हा माणूस वस्तू मोजण्यास शिकला तेव्हा प्रत्येक संख्येसाठी वेगवेगळ्या शब्दांची रचना त्यांनी केली व काही वेळा त्याला जेव्हा मोजणे अशक्य झाले त्यासाठीसुध्दा तो एखादा विशिष्ट शब्द वापरू लागला. प्राचीन काळातील काही टोळ्यांना 19 नंतरचे आकडे मोजता येत नव्हते. तेव्हा त्या नंतरच्या संख्यासाठी 'मला न मोजता येणारे' अशा अर्थाचा शब्द ते वापरत होते.

जस जसा मानवी संस्कृतीचा विकास होत गेला त्यानुसार मोठ मोठ्या संख्याची शब्द रचना उपलब्ध झाली. आज तर एका पुढे 600 **शून्य** *असलेल्या संख्येसाठी सुध्दा नाव आहे. तरीसुध्दा याच्या नंतरही संख्या असू शकते याची जाणही माणसाला आहे. त्यामुळे कालामानाप्रमाणे 'अनंतता' वा इन्फिनिटी (infinity) हा शब्द प्रयोग अती मोठ्या संख्येसाठी वापरला जाऊ लागला.*

काही गणितज्ञांच्या मते इन्फिनिटी ही संकल्पना संख्या पध्दतीला मारुन टाकणारी अशी समजली जाते. अनंत वस्तू असलेल्या ढिगामध्ये आपण 10 - 12 वस्तू त्यात टाकल्यास ही संख्या पहिल्या पेक्षा जास्त असणार असे आपल्या कॉमनसेन्सला वाटते. परंतु गणितात या ढिगाला सुध्दा इन्फिनिटीच म्हटले जाते, हे काही तर्काला पटत नाही. म्हणूनच जसजसे आपण इन्फिनिटीच्या जवळ पोचू लागतो तस तसे संख्या पध्दतीचे नियम कोसळून पडतात.

गेल्या शंभर-दोनशे वर्षात दूरदर्शक व सूक्ष्मदर्शक यांच्यात भरपूर सुधारणा झाली आहे. त्यामुळे अती मोठ्या संख्या व अती सूक्ष्म संख्यांना ओळखण्याची गरज पडू लागली. अवआण्विक (subatomic) शास्त्रज्ञ व खगोल शास्त्रज्ञ अनुक्रमे सूक्ष्मातीसूक्ष्म आणि भरपूर दूरवर व प्रचंड गात्र असलेल्या अवकाशातील ग्रह - नक्षत्रांचे निरीक्षण करत असतात. इन्फिनिटी हा शब्द आता त्यांना पुरेसा वाटेनासा झाला आहे. इन्फिनिटी दर्शविणारे हे ∞ चिन्ह आता निरूपयोगी ठरणार की काय अशी स्थिती आहे. कारण सूक्ष्मातीसूक्ष्म वस्तू मोजण्यासाठी 1 / ∞ हे चिन्ह व प्रचंड गात्रांची तुलना करताना > ∞ हे चिन्ह निरूपयोगी ठरत आहेत.

गणितामध्ये जेव्हा एखादी समस्या उद्भवते तेव्हा गणितज्ञ मार्ग काढून समस्येचे निवारण करतात. यावेळीसुद्धा रुट्गेर्स (Rutgers) विद्यापीठातील दोन गणितज्ञ पुढाकार घेऊन काही नवीन संकल्पनांची मांडणी केली आहे. त्यांचीच ही एक कथा.

हडसन् नदीच्या काठी, न्यू जेर्सी येथील बेर्गन कौंटीत 1992च्या ऑगस्ट महिन्यातही कडक उन्हाळा जाणवत होता. भरपूर झाडी - झुडपं असूनसुद्धा तेथील रहिवाशी घामाघूम होत होते. लहान मुलांचा बहुतेक वेळ बंगल्यासमोरील हिरवळीवर जात होता. अशाच एका बंगल्यासमोरील हिरवळीवर 9 वर्षाची युवान व 8 वर्षाचा जॉर्ज क्रुस्गल गप्पा मारत बसले होते.
"मी आताच एक ग्लास सरबत पिऊन आले." युवान कपाळावरील केस मागे घेत म्हणाली.
"मी तर दोन ग्लास घेतले असते" जॉर्ज पुटपुटला.
"तू दोन घेतल्यास मी तीन ग्लास घेईन." युवानचे उत्तर.
मित्र मैत्रिणी असल्यातरी मी तुझ्यापेक्षा वरचढ ही खोड काही जात नव्हती.

"मी 10 ग्लास घेईन."
"खरच?"
"खरच!"
"मी शंभर ग्लास.... "
"नको. फार होतील."
"काही नाही. मी घेऊ शकतो. "
"मग मी एक कोटी घेईन."
"अस का. एक कोटी म्हणे..... शंभर कोटी, लाख कोटी, ..."
असे एकमेकाशी ओरडू लागले.
शेवटी जॉर्ज म्हणाला. "मी इन्फिनिटी ग्लास घेईन."
"अशी संख्याच नाही." युवानची शंका.
"आहे. जेव्हा आपल्याकडे मोजता न येण्याइतपत वस्तू असतात, तेव्हा त्याला इन्फिनिटी वस्तू असे म्हणतात." जॉर्जचे शंका निरसन.
"मग मी इन्फिनिटी + 1 ग्लास घेईन. " युवानचा उत्साह.
"युवान, अशी संख्या नसते. इन्फिनिटीत 1 जमा केल्यास उत्तर पुन्हा इन्फिनिटीच येते."
"काही का असू दे. तू जितके ग्लास घेशील त्यापेक्षा मी एक जास्त घेईन." युवानचे अल्टिमेटम.
येथे मात्र जॉर्ज गोंधळला. इन्फिनिटी + 1 हे गणितीय नियमात बसेल का? युवान तसे करू शकती का?

त्याच वेळी त्याचे काका मार्टिन क्रुस्कल (Martin Kruskal) सायकलीवरून घरासमोर आलेले दिसले. ते रुट्गेर्स विद्यापीठातील गणित विभागाचे प्रमुख होते. त्यांना बघितल्या बघितल्या दोन्ही मुलांनी गलका केला. जॉर्ज काकाला आपल्या भांडणाचा विषय सांगण्यासाठी पुढे

जाऊ लागला. युवान चार पावलं मागे राहिली. काका पुतण्या एक होऊन मला बोलू देणार नाहीत अशी शंका तिला वाटत होती.
"अंकल मार्टिन, तिला जरा समजावून सांगा की इन्फिनिटी + 1 हे नियमाच्या विरुद्ध आहे."
युवान मध्येच त्याला आडवत "कसले नियम? तुझ्याकडे इन्फिनिटी असल्यास माझ्याकडे इन्फिनिटी + 1 असणार. एकदम सोप... " युवानची स्पष्टोक्ती.
68 वर्षाच्या मार्टिनला या दोन्ही मुलांच्या भांडणाच्या विषयाचे कौतुक वाटले. गंमत वाटली. थोडेसे अडखळतच "माझ्या मते इन्फिनिटी + 1 ..... होऊ शकते......"
युवान उडी मारत खिजवू लागली. जॉर्ज हिरमुसला. मार्टिन त्याच्याकडे बघत "तरीसुद्धा इन्फिनिटी + 1 हे इन्फिनिटीच असणार... !"
"नाही, तसे नाही... अधिक 1 असायला हवे...." युवान ओरडली.
"मग माझ्याकडे 10 इन्फिनिटी + 2 आहेत... "जॉर्जही ओरडला.
"परंतु तसे म्हटले तरी ती इन्फिनिटीच होणार." अंकल मार्टिनचे उत्तर.
"कसला हा मूर्खपणा. अगदी शेंबड्या पोरालाही 10 पट म्हणजे पहिल्यापेक्षा खूप जास्त हे कळते." युवानची टिप्पणी.
"नाही, ते सर्व इन्फिनिटीच असणार." मार्टिनचे उत्तर.
युवान हसायला लागली. "म्हणजे इन्फिनिटीतून 10 -12 वजा केले तरी इन्फिनिटीच राहणार.... काही तरी घोळ आहे... जॉर्ज, तुझ्या अंकलला गणितातले सर्व काही कळते असे तू म्हणत होतास. परंतु गणितात असे काही घडते याची कल्पना मला नव्हती."
"अंकल, प्लीज सांगा की खर काय आहे?" जॉर्ज.
"मी जे सांगतो ते सर्व खरे आहे. इन्फिनिटी तून काही वजा केल्यास वा काही जमा केल्यास इन्फिनिटीच राहते. त्याला दोनदा गुणिले तरी इन्फिनिटीच

असते. हे बघा, इन्फिनिटी ही मुळात संख्या नाही. संख्येच्या पलिकडची ही संकल्पना आहे. व त्याला आपण गणिताच्या नियमात बसवत आहोत."
"तुझ्या अंकलला काही येत नाही व त्याला काही कळत नाही". युवान हळूच जॉर्जच्या कानात गुणगुणली. जॉर्जलाही ते पटले. तो निराश झाला. अंकलला बाय बाय करत ही मुलं निघून गेली.

***

दुसऱ्या दिवशी सकाळी सकाळीच मार्टिन क्रुस्कल रुट्गेर्सच्या गणित विभागातील प्रशस्त खोलीत पोचला. एक मीटिंग होती. तेव्हाही जॉर्ज व युवान यांची टीका टिप्पणी तो विसरू शकत नव्हता. 8 -10 वर्षाची ही चिमुरडी मुलंसुद्धा इन्फिनिटीतील चूक शोधू शकतात याचे त्याला आश्चर्य वाटू लागले. कदाचित युवानला कसे समजावून सांगावे हे त्याला जमले नसेल. तरीसुद्धा इन्फिनिटी ही संख्या पद्धतीत चपखल बसत नाही याची त्याला पुरेपूर खात्री होती.

त्याच वेळी 56 वर्षाचा प्रा. कॉनवे व त्याचे दोन विद्यार्थी समोर येऊन बसले.
"जॉन , माझ्यासमोर एक समस्या आहे. ..." मार्टिन म्हणाला.
"समस्या... व तेही तुझ्या आवाक्याबाहेरचे... काही तरीच काय..." चेष्टेच्या स्वरात कॉनवे म्हणाला.
"चेष्टा जाऊ दे. माझ ऐक. आपण दर वेळी इन्फिनिटीचा उल्लेख करतो व ती आपल्याला चकवत असते. इन्फिनिटीला आपण क्रमित संख्येच्या रांगेत (ordered numbers) बसवू शकत नाही. त्यामुळे संख्या इन्फिनिटीच्या जवळ पास येऊ वागते तेव्हा संख्या पद्धतच कोसळू लागते. आणि आपण त्याला दुर्लक्षितही करू शकत नाही."

क्रमित संख्यांच्या मागे एक तर्क असते. 5 ही संख्या 3 पेक्षा मोठी आहे व 3, 1 पेक्षा मोठी. त्यामुळे 5 ही संख्या 1 पेक्षा मोठी असणारच. (If $a>b$ and $b>c$, then $a>c$) किंवा $a=b$ व $b=c$ असल्यास $a=c$ असणारच.
"परंतु हे सर्व नियम इन्फिनिटीच्या जवळ पास लागू होत नाहीत. संख्या पद्धतीत काही उणीव आहे हे यावरून स्पष्ट होत आहे"
"कसल्या उणिवा...?" कुणीतरी पुटपुटले.

जॉन स्पष्टीकरण देऊ लागला. "मुळातच संख्या पद्धतीत सुरुवातीपासूनच अनेक दोष होते. पहिल्या पहिल्यांदा संख्या पद्धत म्हणजे 1,2,3,4... या पूर्णांक संख्या हा समज होता. कारण हेच आकडे मोजता येण्यासारख्या होत्या. 4, 5 होत्या; परंतु साडेचार वा पावणे पाच अस्तित्वात नव्हत्या. जेव्हा आपल्या पूर्वजांना भागाकाराचा शोध लागला तेव्हा त्यांना पूर्णांकातील उणिवा लक्षात येऊ लागल्या. त्यांनी दोन संख्यांच्या मध्ये असलेल्या या अपूर्णांकाचा करण्याची गरज भासत आहे."
"कसल्या उणिवा?" विद्यार्थ्याचा प्रश्न
"शून्य आणि लहानातले लहान अपूर्णांक यांच्यात एक फार मोठी दरी आहे. आपण जेव्हा सूक्ष्म घटकांचे मोजमाप घेण्याचा प्रयत्न करत असतो - उदा, अणूमधील प्रोटान वा न्यूट्रानच्या चलनवलनांचा अंदाज घेत असतो - तेव्हा ही उणीव प्रकर्षाने जाणवते. आपण त्याचे मोजमाप करू शकत नाही वा त्याचे नेमके वर्णन करू शकत नाही. जेव्हा मोजमाप इन्फिनिटीच्या जवळ पास जाते - उदा, खगोल शास्त्रज्ञ जेव्हा ब्रह्मांडाची मोजमाप करण्याच्या प्रयत्नात असतात - तेव्हासुद्धा हीच अडचण उद्भवते. काही वेळा संमिश्र संख्यांचे उत्तर (complex numbers) असलेल्या समीकरणात मध्येच कुठेतरी थांबावे लागते. अशा समीकरणांचे स्पष्टीकरण क्लिष्ट असते व ही समस्या डिझाइन

इंजिनियर्सची डोकेदुखी होऊन बसते. या उणिवा संख्या पद्धतीलाच नष्ट करू पाहत आहेत."

विद्यार्थ्यांना यातून काही अर्थबोध होत नव्हता. "संख्या पद्धत तर अजूनपर्यंत उत्कृष्टपणे काम करत आहे. यात कसली अडचण..?" विद्यार्थ्यांची टिप्पणी.

कॉनवे व क्रुस्कल एकमेकाकडे बघू लागले.

"कारण यापूर्वी समीकरणांचे उत्तर न सापडल्यास आपण त्याकडे दुर्लक्ष करतो. त्यामुळे संख्या पद्धत परिपूर्ण आहे असे वाटू लागते. परंतु यानंतर आपल्याला काही गोष्टी दुर्लक्ष करून चालणार नाही. "

"परंतु.. जर सातत्य नसल्यास समस्या सुटणार नाहीत..." विद्यार्थ्याची शंका.

"त्यामुळेच आपल्याला योग्य उत्तर शोधावेच लागेल." मार्टिन क्रुस्कल.

"परंतु हे कसे जमणार...? " विद्यार्थी

"संख्या पद्धतीत नवीन भर घालून..." कॉनवेचे उत्तर.

दोन्ही विद्यार्थ्यांना आपले हे प्राध्यापक विनोद करत आहेत की काय असे वाटून हसू लागले.

"ही हसण्यावारी नेण्यासारखी गोष्ट नाही. आम्ही याविषयी भरपूर विचार केला असून पूर्ण विचार करूनच या निर्णयाला पोचलो आहोत." कॉनवे थोड्याशा रागानेच म्हणाला.

"एका नवीन प्रकारच्या संख्येची भर..." क्रुस्कल बाहेर कुठेतरी बघत होता.

"कदाचित शक्य होईल...." कॉनवे कडे बघत ".....कँटर?..."

"कँटर काय आहे?" विद्यार्थ्याचा प्रश्न

"कँटर काय आहे नव्हे, तर कोण आहे असे विचारायला हवे." विद्यार्थ्याला क्रुस्कल झापला.

"तो कोण आहे?" पुन्हा प्रश्न

"अरे, तू गणिताचा विद्यार्थी. गणिताच्या इतिहासाचा तुला परिचय नाही याचे आश्चर्य वाटते. जिऑर्ग कँटर हा 19व्या शतकातील जर्मन गणितज्ञ होता. हासुद्धा इन्फिनिटीतील सातत्याच्या अभावाबद्दल विचार करत होता. याविषयी त्यांनी काही ठोकताळे बांधले होते. त्याला इन्फिनिटी म्हणजे नेमके किती याचा शोध घ्यावयाचा होता. परंतु त्याच्या मृत्युमुळे ते काम अर्धवट राहिले."
विद्यार्थ्यांना अजूनही काही कळत नव्हते.
"इन्फिनिटी म्हणजे किती हे कुणीही सांगू शकणार नाही."
"आम्ही अजूनही त्याची चाचणी घेत आहोत. हाती काही तरी लागेल अशी आशा आहे." जॉन कॉनवे.
मग तो उठून खोलीतील फळ्याकडे गेला. त्यावर Ω (ओमेगा) हे ग्रीक अक्षर गिरवले.
"ओमेगा, हे कशाचे चिन्ह आहे?"
"इन्फिनिटी किती मोठी असू शकते हे सुचविणारी ही एक संज्ञा आहे. तुम्ही संख्या मोजता मोजता इन्फिनिटीपर्यंत पोहोचल्यावर नंतर काय हा प्रश्न उद्भवतो. त्यावेळी Ω हे चिन्ह उपयोगात येते. व त्याचा संख्येप्रमाणे वापर करत येते. "
"परंतु ही Ω किती मोठी आहे याची काही कल्पना आहे का?" विद्यार्थ्यांची शंका.
"ती किती मोठी आहे याची कल्पना नसली तरी ती एक क्रमित संख्या होऊ शकते. आपण $\infty + 1$ म्हणजे किती हे सांगू शकत नाही. परंतु $\Omega + 1$ ही एक तुलनेने मोठी संख्या आहे हे आपण निश्चितच सांगू शकतो. त्यामुळे
$\Omega+1 > \Omega > \Omega-1$
अशी मांडणी करू शकतो. व हे गणितीय नियमात बसू शकते. आता इन्फिनिटीला एक निर्दिष्ट दिशा मिळू शकेल. इन्फिनिटीच्याही पलिकडे

असलेल्या संख्यांना Ω सूचित करू शकते. व त्याना गणितीय नियम लागू होतात."
"परंतु Ω चे मूल्य....."
"त्याची गरज ऩाही. Ω किती मोठी आहे हे समजून घेण्यासाठी त्याच्या मूल्याची गरज नाही. त्यावरून त्याचे अस्तित्व ठरत नाही. त्या मुळातच अतिवास्तव संख्या (Surreal_number) या सदरात मोडतात."
"अतिवास्तव म्हणजे...".
"मार्टिनने हे नाव ठेवले आहे." कॉनवे सांगू लागला. "या नवीन संख्यांना आपण अतिवास्तव संख्या असे म्हणू शकतो. आताच्या संख्या पद्धतीतील उणिवा त्या भरून काढणार आहेत. विचार करा, आपण इन्फिनिटीच्या अगदी जवळ असलेली रिक्त जागा भरून काढू शकतो. त्याचप्रमाणे शून्याच्या जवळही अशीच रिक्त जागा आहे. कल्पना करा, ती किती असेल?"
"अत्यल्प, infinitesimically small."
"त्याची व्याख्या करता येईल का?"
"नाही. फार फार तर 1 भागिले इन्फिनिटी (1÷ Ω) असे म्हणता येईल. तरीसुद्धा अजूनही रिक्त जागा आहे असे वाटत असल्यास त्याची व्याप्ती वाढवता येईल...1 ÷ 2Ω वा 1÷10 Ω ..... किंवा 1 ÷ (ΩxΩ) असेही म्हणू शकतो. त्यामुळे शून्याच्या जवळची जागा भरून काढण्यात अडचण येणार नाही."
विद्यार्थी हळू हळू उठू लागले. अजूनही त्यांना हा सर्व प्रकार विनोदी वाटत होता.

परंतु संख्या पद्धतीतील उणिवा भरून काढण्यासाठी कॉनवे व क्रुस्कल यांची अतिवास्तव संख्या वापरल्या जात आहेत. याच्या वापरामुळे खगोलशास्त्र, अभियांत्रिकी व भौतिकी यांच्यातील काही क्लिष्ट संकल्पना

स्पष्ट होत आहेत. कदाचित या शतकातील विज्ञान - तंत्रज्ञान यातील संशोधनाला ही संख्या कलाटणी देईल असा विश्वास वैज्ञानिकांना वाटत आहे

प्रतिसाद

गणिती या अच्युत गोडबोले व माधवी सरदेसाई यांच्या अलिकडेच प्रसिद्ध झालेल्या पुस्तकाच्या प्रास्ताविकात गणित या विषयाच्या थ्रिल बद्दल लिहिताना "हे थ्रिल वाचकापर्यंत पोहोचवाव. वाटलं सगळयांना ओरडून सांगाव, अरे, हे बघा गणित किती सुंदर असू शकतं ते! बघा, त्यातल्या मूलतत्वांमध्ये किती सौंदर्य आहे आणि ती निर्माण करणाऱ्या किंवा शोधणाऱ्या गणितंज्ञांची आयुष्यं कशी चित्रविचित्र घटनांनी, सुखदुःखानी, हेव्यादाव्यानी पण तितक्याच दिलदारपणानं भरलेली आहेत. या सगळयांतून वाचकानं पुढे काही तरी वाचावं, शिकावं, शिकवावं, शेअर करावं हाच उद्देश आहे......" असे लिहिलेले आहे.

गणिती पुस्तकाच्याएवढा आवाका नसला तरी ही लेखमालिका मर्यादित अर्थाने हेच ध्वनित करण्याचा प्रयत्न करत आहे. या लेखमालिकेतील लेखांना वाचकांनी भरभरून प्रतिसाद दिल्याबद्दल मी त्या सर्वांचा आभारी आहे. लेखांना मिळालेल्या प्रतिसादात अनेक सूचना होत्या. परंतु त्या मी पूर्ण करू शकलो नाही याचे मनाला शल्य वाटत आहे. मुळात ललित अंगाने लेख लिहिल्यामुळे जास्त भर गणितीय संकल्पनाऐवजी गणितज्ञांच्या आयुष्यातील नाट्यमय प्रसंगावर असल्यामुळे गणित विषयाला न्याय देऊ शकलो नाही हेही तितकेच खरे.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - शून्य (0)

मटका खेळणारे अथवा अंकशास्त्रावरून, कबालावरून भविष्य वर्तविणारे यांचा अपवाद वगळता आपल्यातील बहुतेकाना अंक, आकडे, संख्या म्हणजे वस्तू मोजण्याचे एक परिमाण एवढेच लक्षात राहते. संख्यांना त्यांचे खास असे व्यक्तिमत्व असते असे विधान केल्यास अतिशयोक्त ठरणार नाही. 16 व 17 अगदी जवळचे आकडे असले तरी 16 हा एक परिपूर्ण वर्ग आहे व 17 ही एक अविभाज्य (prime) संख्या आहे. संख्यांचा वापर अंकगणित, भूमिती वा वजन, क्षेत्रफळ, खोली, उंची, घनता इत्यादी व्यवहारोपयोगी गोष्टीबरोबरच सांस्कृतिक व सामाजिक व्यवहारातही होत असतो. भारतीय तत्वज्ञांच्या दृष्टीने शून्य ही संख्या, संख्या म्हणून न राहता त्याला परब्रह्म वा तत्सम असे काही गुण चिकटवलेले आहेत. शून्यवाद, शून्यावस्था याविषयी तावातावाने चर्चा करणारे तत्वज्ञ आजही नक्कीच सापडतील. त्यामुळे आकड्यांची करामत हे नेहमीच मनोरंजक व माहितीपर विषय आहे.

हाच धागा पकडून 0 ते 9 पर्यंतच्या आकड्याविषयी काही अधिक माहितीचा शोधण्याचा हा एक छोटासा प्रयत्न!

शून्य (0)

- आधुनिक गणितशास्त्राचा गाभा म्हणजे 0 ही संख्या असे म्हणता येईल.भारतीय गणितज्ञाने जगाला दिलेली देणगी म्हणून या संख्येचा नेहमीच उल्लेख केला जातो.
- दशमान पद्धतीचा मूळ आधार असलेल्या या संख्येमुळे ग्रीक, मेसोपोटेमिया, माया, इन्का इत्यादींच्या संस्कृतीत वापरात असलेल्या आकडेमोडीसंबंधातील किचकटपणा व गुंतागुंत अधोरेखित होते.

- ब्रह्मगुप्त सिद्धांतामध्ये (628 क्रि.श.) उल्लेख असलेल्या शून्यासंबंधींच्या काही नियमांचा आजही वापर केला जातो. उदाहरणार्थ, शून्य व ऋण संख्येची बेरीज ऋण असते. शून्य व धन संख्येची बेरीज धन असते.
- ही सर्वात लहान धनसंख्या आहे.
- 0अंश सेल्सिअस तापमानात पाणी बर्फ होते.
- संगणक शास्त्रात शून्याचा उल्लेख null असा केला जातो.
- हे कोणत्याही गोष्टीचा अभाव, रिक्तता सूचित करणारे चिन्ह अथवा प्रतीक.
- नागार्जुन या बौद्ध तत्वज्ञाच्या मते प्रत्येक वस्तूत परस्पर विरोधी गुणधर्मांचे अस्तित्व आहे; ती आहेही व नाहीही. ती आहे व नाही यांपलिकडे आहे. या दृष्टीने ती शून्य आहे.
- सृष्टीच्या बुडाशी उत्पत्ती, पालन व विनाश करणारे परमतत्व असून त्याला शून्य तत्व असे म्हटले जाते.
- शून्यवादात जग हे केवळ अभावात्मक म्हणजे काही नाही, म्हणजेच ब्रह्म आहे अशी मांडणी केली जाते.

(यासंबंधात धार्मिक, पौराणिक उल्लेख मोठ्या प्रमाणात सापडतील त्या वगळून आपणही यात यथाशक्ती भर घालू शकता.)

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - एक (1)

अंकांच्या विशिष्ट गुणधर्मासंबंधी विचार करताना 1 या अंकाचे भरपूर गुणधर्म आहेत हे लक्षात येईल.

- पहिली विषम संख्या.
- कुठल्याही संख्येला 1 ने गुणल्यास त्या संख्येत बदल होत नाही.
- सांख्यिकीत (statistics) 1 म्हणजे 100 टक्के शक्यता.
- भूमितीतील sine व cosine चे कमाल मूल्य 1 असते.
- 1 ही परिपूर्ण वर्ग व घनसंख्या, $1 = 1^2 = 1^3$.
- झेनोच्या पॅरॉडॉक्सलासुद्धा (490 -430 क्रि.श.पू) याच संख्येचा आधार आहे. झेनोच्या या विरोधाभासात आपल्याला ईप्सित ठिकाणी पोचण्यासाठी पहिल्यांदा अर्धे अंतर पार करायला हवे. यात काय विशेष असे वाटत असेल. परंतु उरलेल्या अंतराचेसुद्धा असेच अर्धे अर्धे करत गेल्यास आपण कधीच आपल्या ईप्सित ठिकाणी पोचू शकत नाही. 1 = 1/2+1/4+1/8+1/16+1/32 ....
  परंतु 17व्या शतकात लेब्निट्झ व न्यूटन यांच्या कॅल्क्युलसच्या शोधामुळे convergence series चा जगाला परिचय झाला व झेनोच्या पॅरॉडॉक्सला विश्रांती मिळाली.
- बुद्धीबळ स्पर्धेच्या परिणामांचा उल्लेख करताना 1 म्हणजे जिंकणे, ० म्हणजे हरणे व 1-1 म्हणजे बरोबरीने सुटणे असा अर्थ होतो.
- स्पर्धात्मक युगात वावरताना प्रथम क्रमांकावर असणे श्रेयस्कर ठरते. तेथेही 1 हीच संख्या महत्वाची ठरते.
- एकेश्वरवादात एकाच ईश्वराचे विधान व एकाच ईश्वरावर श्रद्धा असते.

- एकच अग्नी अनेक ठिकाणी प्रज्वलित होतो, एकच सूर्य जगभर प्रकाश पाडतो व एकच उषा सर्व विश्व प्रकाशित करते. एकापासून हा सर्व पसारा झाला आहे. (ऋग्वेद 8-58-2)
- एकतत्ववादात या जगात फक्त एकच सत्य तत्व आहे, मग ते भौतिक असो अथवा आध्यात्मिक असो.
- एकात्मवादानुसार आत्मा एक आहे व तो सर्वत्र व्याप्त आहे. हा वेदांतशास्त्राचा एक मुख्य सिद्धांत समजला जातो.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - दोन (2)

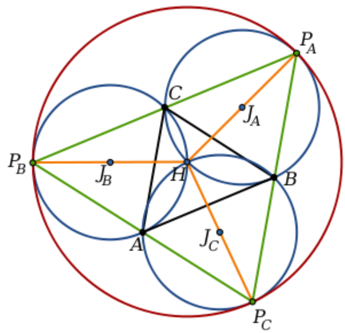
- सम असलेली एकमेव अविभाज्य (prime)संख्या.
- सर्व अविभाज्य संख्याच्या इंग्रजी स्पेलिंगमध्ये 'e' हे अक्षर आहे. अपवाद फक्त 2 (two) या आकड्याचा.
- 2 चा वर्गमूळ (square root 2) ही अपरिमेय (irrational) संख्या आहे. पूर्णांकाच्या रूपाने अथवा दोन पूर्णांकाच्या रूपाने व्यक्त करता येत नाही अशा संख्येला अपरिमेय (irrational) संख्या असे म्हटले जाते. म्हणजेच रूट 2 ला p/q या स्वरूपात मांडता येत नाही. (येथे p आणि q धन पूर्णांक असून त्यांच्यामध्ये समायिक अवयव नाहीत.) इ.स. पू. 500 च्या कालखंडात हिप्पासस यानी प्रथम अशा संख्यांचा शोध लावला. परंतु त्या काळी जगातील सर्व घटनांची नोंद अपूर्णांकात करता येते या पायथागोरसच्या गृहितकाच्या विरोधात हिप्पाससचे विधान असल्यामुळे त्याला समुद्रात फेकून देण्यात आले. आधुनिक काळात कुठल्याही गणितीय शोधाबद्दल भरपूर सहिष्णुता दाखवली जाते.त्याकाळी तसे नव्हते. (तरीसुद्धा बालपणी गणित विषयात विशेष प्राविण्य दाखविणाऱ्याबद्दल तिरस्कारयुक्त नजरेने पाहिले जाते, हेही मान्य करायला हवे.)
- इटॅलियन भाषेतील बिस्कोटी (biscotti) शब्दाचा नेमका अर्थ दोनदा शिजविलेला असा होतो. त्यावरून बिस्किट (biscuit) हा शब्द रूढ झाला असावा. त्यातील बाय (bi) चाच 2 सूचित करण्यासाठी वापरात आला असावा. बायसिकल, बायनाक्युलर्स, बायप्लेन, बायसेक्ट इ.इ. शब्दांची व्युत्पत्ती झाली असावी.

- पायथागोरसच्या प्रमेयात काटकोन त्रिकोनातील कर्णरेषा मोजण्यासाठी $a^2+b^2 = c^2$ चा वापर होतो व त्यात 2 हा आकडा महत्वाचा असतो. (a आणि b त्रिकोनाचे दोन बाजू व c ही कर्ण रेषा आहे.)
- एखाद्या घनाकृतीच्या शिरोबिंदू (vertices - v) , पृष्ठक (faces - f) आणि कड्यां (edges - e) साठी $v + f - e = 2$
हे समीकरण वापरतात. याचा शोध लिओनार्ड ऑयलर (Euler) यानी प्रथम लावला.
- आइन्स्टाइनच्या समीकरणातील $E = mc^2$ मधील 2 हा आकडा अती महत्वाचा ठरतो.
- फेर्माच्या (Fermat) शेवटच्या प्रमेयातील ($x^n + y^n = z^n$) समीकरणात n चे मूल्य 2 पेक्षा जास्त असल्यास x, y व z शोधता येत नाहीत. असे का याचे उत्तर 300 वर्षानंतर अँड्र्यू विलिस या संशोधकाने 1990च्या दशकात शोधून दाखविले.
- स्थळ व काळ या दोन अंगामुळे ऐतिहासिक घटना निश्चित करण्याच्या कामी साह्य होते.
- द्वितत्ववादात दोन परस्पर विरोधी तत्वांपासून जगातील सर्व गोष्टींचा खुलासा करता येतो अशी मांडणी केली जाते.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - तीन (3)

- 3 ही संख्यासुद्धा 1 व 2 प्रमाणे अविभाज्य (prime) संख्या आहे.
- ज्या प्रकारे 2 बिंदू दिल्यास त्याना जोडणारी रेषा काढता येते त्याचप्रमाणे 3 बिंदूवरून त्रिकोणाची रचना करता येते.
- जॉन्सन प्रमेयानुसार (1913) J_A, J_B, J_C हे 3 वर्तुळ H बिंदूपाशी आणि A,B,C या बिंदूपाशी एकमेकांचा छेद घेत असल्यास P_A, P_B, P_C हे बिंदू या तिन्ही वर्तुळाशी एकरूप (congruent) असलेल्या H वर्तुळावर असतात.



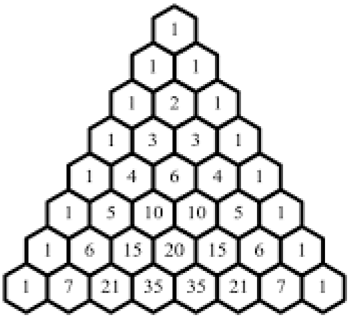
- एका त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजा वापरून काढलेल्या तीन समभुज त्रिकोणाच्या मध्यबिंदूंना जोडल्यास तयार होणारा चौथा त्रिकोणही समभुज त्रिकोणच असेल. हा प्रमेय नॅपोलियन प्रमेय म्हणून ओळखला जातो. फ्रान्सचा सम्राट नॅपोलियन (1761-1821) हा हौशी गणितज्ञ होता. पियरे सायमन लॅप्लास या खगोल व गणितशास्त्रज्ञाने त्यानी लिहिलेले सेलेस्टियल मॅथेमॅटिक्स हा शोधग्रंथ नॅपोलियनला अर्पण केले. पुस्तक वाचून झाल्यानंतर नॅपोलियनने यात कुठेही ईश्वराचा

उल्लेखच नाही अशी विचारपूस केल्यानंतर लॅप्लास " ईश्वर या गृहितकाची मला गरज भासली नाही" असे उत्तर देतो.

- एखादा काटकोन त्रिकोण समद्विभुज त्रिकोण असू शकतो. परंतु तो कधीही समभुज त्रिकोण असणार नाही. कारण समभुज त्रिकोणातील प्रत्येक कोन 60 अंशाचा असावा लागतो.

- अपरिमित लांबीचा त्रिकोण म्हणून पास्कल त्रिकोणाला सूचित करता येईल. खाली दिलेल्या आकृतीप्रमाणे पास्कलच्या त्रिकोणाची रचना असते. या त्रिकोणाच्या पहिल्या दोन ओळीनंतरच्या ओळीसाठी दोन्ही कडेला 1, 1 लिहून वरच्या ओळीतील दोन दोन संख्यांची बेरीज करून मधल्या संख्या लिहिल्या जातात. या पास्कल त्रिकोणातील संख्यांचा सेट सिद्धांतात वापर होतो. द्विपद सहगुणक (binomial coefficient) म्हणूनसुद्धा या ओळीतील संख्याचा वापर होतो. n ओळीतील k क्रमांकाची संख्या n! / (k!(n- k)!) हे सूत्र वापरून शोधले जाते. (पास्कल त्रिकोणात पहिली ओळ 0 समजून इतर ओळी मोजल्या जातात.) गणिताचे वैश्विक स्वरूप पाहता पास्कल त्रिकोण हे नाव अपवाद ठरू शकेल. 17व्या शतकातील ब्लेझ पास्कल (1623 -1662) याच्या पूर्वीसुद्धा या त्रिकोणाची माहिती अनेक ठिकाणी होती. चीनमध्ये याला यांग हुई (Yang Hui) त्रिकोण हे नाव असून 13व्या शतकातील या चीनी गणितज्ञाच्या नावाने हा त्रिकोण ओळखला जातो. इराण येथे या त्रिकोणाला खय्याम त्रिकोण असे नाव होते. इटलीत टार्टाग्लिया त्रिकोण हे नाव होते. मुळात या त्रिकोणाला पास्कल त्रिकोण हे नाव 18व्या शतकात

पियरे रेमंड दि मॉंटमॉर्ट (1678 -1719)या गणितज्ञानी पास्कलच्या स्मरणार्थ ठेवले.



- स्वातंत्र्य, समता आणि बंधुभाव या तीन संकल्पना फ्रेंच राज्यक्रांतीनंतर प्रचारात आल्या.
- तीन ऋतु (उन्हाळा, पावसाळा व हिवाळा), तीन काळ, तीन अवस्था (उत्पत्ती, स्थिती व लय), प्राणायामाच्या तीन क्रिया, इ.इ. तीन या अंकाशी जोडलेल्या आहेत.
- तीनशी संबंधित मराठी म्हणींची संख्यासुद्धा कमी नसावी. उदा: *तीन दिवस पावणा चौथ्या दिवशी रावणा, तीन पावलं पुढे चार पावलं मागे, तेरड्याचा रंग तीन दिवस, तीन तिघाडा काम बिघाडा, पळसाला पाने तीन, इजा बिजा तिजा* इ.इ. परंतु या म्हणींचे मूळ व त्या कशामुळे प्रचारात आल्या हे या क्षेत्रातील अभ्यासकच सांगू शकतील.

●●●

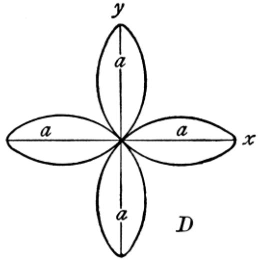
हा खेळ संख्यांचा! - चार (4)

- 2 चा वर्ग (2^2) वा 2 ला 2 ने गुणिल्यास (2x2) किंवा 2 + 2 अशी बेरीज केल्यास 4 ही संख्या येते.
- इंग्रजी भाषेतील ही एकमेव संख्या अशी आहे की त्याच्या स्पेलिंगमधील एकूण अक्षरं व संख्या तीच आहे. (four, 4 अक्षरं व 4 ही संख्या) गंमत म्हणजे आपण कुठलाही आकडा घेऊन त्याच्यातील स्पेलिंगच्या अक्षरांची बेरीज, त्यानंतर आलेल्या उत्तरातील संख्येच्या अक्षरातील बेरीज .... असे करत गेल्यास शेवटी 4 हाच आकडा येतो.उदाहरणार्थ,

  1 - one - 3 अक्षरं - three - 5 अक्षरं - five 4 अक्षरं - four -4;

  7 - seven - 5 अक्षरं - five - 4 अक्षरं - four -4;

  11 = eleven - 6 अक्षरं - six - 3 अक्षरं - three - 5 अक्षरं - five - 4 अक्षरं - four -4; याचप्रमाणे कुठल्याही लहान मोठ्या आकड्याशी हा खेळ खेळू शकतो.
- चार पर्णी गुलाब (four-leaved-rose) : गुलाब फुलाच्या चार पाकळयांच्या आकृतीसारखी वक्र असलेली आकृती.



यात सर्व पाकळयांच्या सीमारेषा विबंधनव्यूहाच्या प्रारंभस्थानी एकमेकींना स्पर्ष करतात. यासाठी r=a x cos 2ϴ

अथवा r = a x sin 2ϴ या समीकरणाचा वापर केला जातो.
(हे फक्त 4 पाकळ्यासाठी नसून n-leaved-rose साठी या समीकरणात बदल करून polar coordinates शोधल्या जातात.)

- चतुर्थ प्रमाणपद (fourth proportional) - प्रमाण दर्शविण्यासाठी वापरावयाच्या दोन गुणोत्तरांतील चौथे पद. उदाहरणार्थ,
  अ :ब : :क:ड
  यामध्ये प्रमाण कायम ठेवले असताना, तीन पदानंतर येणारे पद.

- चतुर्थ परिमाण : अवकाशामधील एक काल्पनिक परिमाण. नेहमीच्या वापरात असलेल्या लांबी, रुंदी, उंची या तीन परिमाणांशी हे गृहित परिमाण काटकोनात आहे, असे समजले जाते.
  (काल यालाही चतुर्थ परिमाण असे समजले जाते.)

- फ्रेंच कवी व गणितज्ञ क्लॉड गॅस्पर बॅचेट दि मेझिरियाकने(1581-1638) 4 या संख्येभोवती काही गृहितकांची रचना केली होती. त्यापैकी 1 ते 120 संख्यापर्यंतच्या सर्व सम संख्यांना 4 वा त्यापेक्षा कमी अशा परिपूर्ण वर्गाची बेरीज म्हणून दाखविणे शक्य आहे, या गृहितकाला भरपूर प्रसिद्धी मिळाली. उदाहरणार्थ,
  $120 = 64+36+16+4 = 8^2 + 6^2+4^2+2^2$
  $110 = 64+36+9+1 = 8^2 + 6^2+3^2+1^2$
  $100 = 64+36= 8^2 + 6^2$
  $10 = 9+1= 3^2 + 1^2$
  i.e. $p = a_0^2 +a_1^2+a_2^2 +a_3^2$..... (where p =2q and 1 पियरे फेर्मा (1601-1665) या गणितज्ञाने हे गृहितक सिद्ध करून दाखविले. परंतु नेहमीप्रमाणे त्याने त्याबद्दल कागदाच्या marginमध्ये लिहिल्यामुळे ते

कागद हरवले. जोसेफ लुई लॅग्रॉंज यानी 1770 साली पुन्हा एकदा सिद्ध करून दाखविले. याला चार वर्ग प्रमेय (four square theorem) म्हणून गणित क्षेत्रात ओळखला जातो.

- हा चार वर्ग प्रमेय 120पर्यंतच नव्हे, तर कुठल्याही सम संख्येला लागू करता येतो. परंतु बेरजेतील संख्या कोणती यासाठी कुठलेही बीजगणितीय सूत्र नाही. $1718 = 7^2 + 12^2 + 25^2 + 30^2 = 49+144+625+900$

  यातील 7, 12, 25, 30 या वर्गमूळातील संख्यांसाठी सूत्र नाही. 7, 12, 25, 30 यांना कसे शोधले यासाठी रीत नाही.त्याचप्रमाणे या संख्या वेगवेगळया असाव्यात असा नियमही नाही.1718 वेगळ्या प्रकारेसुद्धा लिहिता येते. उदाहरणार्थ्, $1718 = 8^2+6^2+4^2+2^2$ परंतु विषम संख्या 15 साठी $15 = 9+4+1+1 = 3^2 +2^2+1^2+1^2$ असेच लिहिता येते. याला पर्याय नाही.

- भौतिकशास्त्रज्ञांच्या मते या जगात, गुरुत्व बळ, विद्युत-चुंबकीय बळ, क्षीण आण्विक बळ आणि सशक्त आण्विक बळ असे 4 बळ अस्तित्वात आहेत.

- 1852 साली फ्रान्सिस गुथ्रे या तरुण गणितज्ञाला इंग्लंडचा नकाशा रंगविताना प्रत्येक जिल्हा (परगणा) वेगवेगळया रंगाने रंगविण्यासाठी (व जिल्ह्याच्या सीमा ठळकपणे सूचित करण्यासाठी) केवळ 4 रंग पुरेसे आहेत हे लक्षात आल्यानंतर त्यानी ऑगस्ट डी मॉर्गन या प्राध्यापकाला कळवले. त्याकाळापासून या गृहितकाच्या खरे-खोटेपणाविषयी अनेकानी प्रयत्नाची शर्थ केली. शेवटी 1977मध्ये केनेथ ॲपल आणि वूल्फगॅंग हॅकेन यानी संगणक प्रणाली वापरून

याचा सोक्षमोक्ष लावला. 4 रंगी नकाशाचा प्रमेयसुद्धा एके काळी वैज्ञानिकांच्या कुतूहलाचा विषय होता.

- मुद्रण व्यवसायात रंगीत छपाईसाठी CMYK (Cyan, Magenta, Yellow & Black) या 4 वा त्यापेक्षा कमी रंगांचा वापर करून विविध रंगछटांची निर्मिती केली जाते. (The CMYK चा वापर HTML वा style sheets साठी केला जात नाही.)
- काही समाजात 4 हा आकडा अशुभ मानला जातो. आपल्या येथे चार जणाच्या खांद्यावर .... हा निषिद्ध समजला जातो. त्याचप्रमाणे कँटोनीज व जपानीजसुद्धा 4 या संख्येला मृत्युचा वास आहे असे समजतात.
- 4 बद्दलच्या काही म्हणी:
  कानात व डोळ्यात चार बोटांचं अंतर असतं;
  चार दिवस सासूचे, चार दिवस सुनेचे;
  चार जणांची शेती, खापर येई हाती;
  पापाची शिदोरी चार दिवस बरी. इ.इ.
- 4 वेद, 4 वर्ण, 4 दिशा, स्वरांचे 4 प्रकार (वादी, संवादी, विवादी, अनुवादी), 4 युगे, लोकशाहीचे 4 स्तंभ इ.इ. गोष्टी 4 शी निगडित आहेत.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - पाच (5)

- 5 या संख्येला फेर्मा प्राइम (अविभाज्य) संख्या असे म्हटले जाते.
- अविभाज्य संख्यामध्ये शेवटचा अंक 5 असलेली ही एकमेव संख्या आहे. (कुठल्याही संख्येचा शेवटचा आकडा 5 असल्यास ती संख्या 5 ने पूर्णपणे भागिले जावू शकते. त्यामुळे ती अविभाज्य संख्या नसते.)
- प्राचीन ग्रीक तत्वज्ञांनी अग्नीचा टेट्राहेड्रानशी, पृथ्वीचा हेक्साहेड्रानशी, वायूचा ऑक्टाहेड्रानशी व पाण्याचा आयकोसाहेड्रानशी जोडला होता. प्लेटोचा समकालीन थिएटेटस (क्रि.पू. 417 - 396) यानी या आकृतींचे गणितीय वर्णन केले होते. या 5 आकृतीव्यतिरिक्त अशा प्रकारचे बहिर्वक्र नियमित बहुभुजाकृती नाहीत, हे सिद्ध करून दाखविले होते.
- $ax^2 + bx + c = 0$

  या प्रकारच्या द्विघात समीकरणाचे अवयव शोधण्यासाठी

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

या सूत्राचा वापर केला जातो.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ व $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

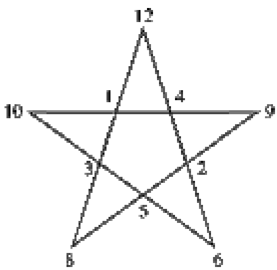
या समीकरणांचे अवयव शोधण्यासाठीसुद्धा गुंतागुंतीचे सूत्र आहे. परंतु $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ या 5 घातांक असलेल्या समीकरणासाठी मात्र अजूनही सूत्र (गुंतागुंतीचेसुद्धा) सापडलेले नाही. पंचघात समीकरणाचे उत्तर शोधण्याच्या प्रयत्नात असलेला एव्हरेस्टो गाल्वा (1811 - 1832) हा गणितज्ञ वयाच्या 21 व्या वर्षी द्वंद्वयुद्धाच्या

क्रीडा प्रकारात जखमी होऊन मेला. या समीकरणाला सूत्र नाही हे सिद्ध करणाऱ्या सिद्धांताचा हेन्रिक एबल या नार्वेजियन गणितज्ञाने शोध लावला(1823). परंतु तोही वयाच्या 26 व्या वर्षी क्षयरोगाला बळी पडला.

- भूमितीत प्लॅटॉनिक घनाकृती (Platonic solids) या एकरूप नियमित बहुभुजाकृती (congruent regular polygons) आहेत. याचे फक्त 5 प्रकार आहेत :टेट्राहेड्रान (4 पृष्ठक), हेक्साहेड्रान (6 पृष्ठक), ऑक्टाहेड्रान (8 पृष्ठक), डोडेकाहेड्रान (12 पृष्ठक), आणि आयकोसाहेड्रान (20 पृष्ठक). ग्रीक तत्वज्ञ प्लेटो च्या (इ.स.पू 424 – इ.स.पू 348) नावाने या आकृती ओळखल्या जातात.



- पंचभुजाकृतीच्या ताऱ्यांच्या वैशिष्ट्यपूर्ण आकारामागे काही गूढ आहे असे समजले जाते.



सामान्यपणे 5 भुजा असलेल्या आकृतीत 10 शिरोबिंदू असतात. शेजारील आकृतीत शिरोबिंदूंचे नामांकन इंग्रजी A,B,C,D ...ने सूचित केले आहे. A,B,C,D ...ऐवजी 1 ते 10 आकड्यानी त्यांना अशा प्रकारे सूचित करायला हवे की प्रत्येक रेषेवरील आकड्यांची बेरीज तीच यायला हवी. हे का शक्य नाही याचे उत्तर 1960 मध्ये चार्ल्स ट्रिग या गणितज्ञाने शोधले. (7 ऐवजी 12 ही संख्या वापरून प्रत्येक रेषेवरील संख्यांची बेरीज 24 शक्य आहे.)

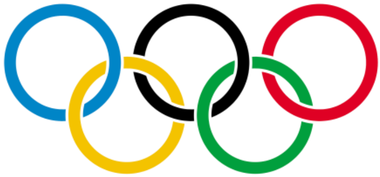
- योगशास्त्रानुसार आपले शरीर डोके, दोन हात व दोन पाय असलेल्या पंचाकृतीत आहे.
- जॉन कॉनवे (जन्म 1937) या गणितज्ञाने checker jumping या बुद्धीबळासारख्या खेळाच्या मर्यादाबद्दल भाष्य करताना 5 व्या ओळीत येण्यासाठी कितीही सोंगट्या असले तरी शक्य नाही याचा शोध लावला.
- जगातील सर्वात मोठ्या प्रशासकीय कार्यालयाचे नाव पेंटागॉन असून या इमारतीला 5 बाजू आहेत. फ्रॅंक्लिन रूझवेल्ट (1882 - 1945) या



अमेरिकाच्या राष्ट्राध्यक्षाला पंचकोनाकार फार आवडत असल्यामुळे ही इमारत बांधत असताना त्यानी विशेष लक्ष दिले होते. कारण यापूर्वी

अशी 5 बाजू असलेली संपूर्ण इमारत बांधलेली नव्हती. या इमारतीत 5 पंचकोनाकारातील इमारती असून सर्वात आतल्या भागात 5 एकराचा विस्तीर्ण खुली जागा आहे.

- ऑलिंपिक क्रीडास्पर्धेचे मानचिन्ह एकमेकात अडकलेल्या 5 वर्तुळाकृतीतून तयार झालेला आहे. हे 5 वर्तुळ जगातील 5 खंड सूचित करतात.

  यात उत्तर व दक्षिण अमेरिका यांचा मिळून एकच खंड असे गृहित धरलेले आहे. खरे पाहता पृथ्वीवर आफ्रिका, एशिया, युरोप, दक्षिण अमेरिका, उत्तर अमेरिका, आस्ट्रेलिया व अंटार्क्टिका असे सात भूखंड आहेत. या वर्तुळांच्या निळा, काळा, हिरवा, पिवळा व तांबड्या रंगांचा कुठल्याही अर्थाने या भूखंडांशी संबंधित नाही. परंतु या रंगांच्या पैकी किमान एक तरी रंग जगातील राष्ट्रांच्या ध्वजात दिसतील.

- भूगोलाचा अभ्यास करताना ठावठिकाणा (Location), स्थळ (Place), रहिवाश्यांची भोवतालच्या वातावरणाशी असलेले नाते, स्थलांतराची आणि प्रादेशिक माहिती अशा पाच सूत्रावर भर दिले जाते.

- सन्मानाने मरण यावे असे वाटणाऱ्या वृद्धांना गंभीर आजारपणात नमूद कराव्या लागणाऱ्या पाच इच्छा: ((Five wishes) आजारोपचारा-

संबंधी निर्णय घेणारी व्यक्ती, ज्या प्रकारचे उपचार नको याची माहिती, कितपत आराम हवा याविषयीची इच्छा, इतरांची तुमच्याशी वर्तन आणि तुमच्या अगदी जवळच्यांना कितपत माहीती द्यावी.

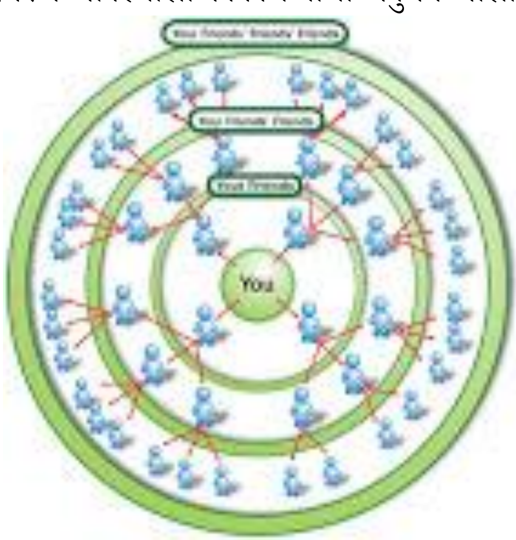
- पंचांग (तिथी, वार, नक्षत्र, योग, करण), पंच ज्ञानेद्रिय, पंचकन्या, पंचकुळी (महाराष्ट्रातील 5 प्रसिद्ध क्षत्रिय कुलं), पंचगव्य, पंचधातू, पंचपक्वान्ने, पंच पांडव, पंचमहाभूत इ.इ. 5 या संख्येशी निगडित आहेत.
- काही म्हणी:
  पाचही बोटे सारखेच नसतात;
  शंभर गेले, पाच राहिले;
  पाच गेले, पन्नास राहिले'

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - सहा (6)

- 6 ही संख्या 2x3 किंवा 1+2+3 किंवा 1x2x3 या स्वरूपात मांडता येते.
- 6 ही एक परिपूर्ण संख्या (perfect number) आहे. ज्या संख्येंच्या भाजकांची बेरीज तीच संख्या असते अशा संख्यांना परिपूर्ण संख्या असे म्हटले जाते. 6 च्या नंतरची परिपूर्ण संख्या 28 (28 = 14+7+4+2+1) व त्यानंतरची 496. आजपर्यंत फक्त 50 परिपूर्ण संख्यांचा शोध लागलेला आहे.
- भूमितीत sine, cosine, tangent, cotangent, secant आणि cosecent या 6 फंक्शनवरून त्रिकोनाच्या भुजा माहित असल्यास कोन वा कोन माहित असल्यास भुजा यांचा शोध घेता येते.
- एका कागदावर 6 बिंदू दाखवा. त्यातील प्रत्येक 2 बिंदूंना एकदा काळ्या व नंतर निळ्या शाईने जोडत गेल्यास त्यातील किमान एक तरी त्रिकोन निळा किवा काळ्या रंगाचा असेल. येथे 6 बिंदूना महत्व आहे. (5 बिंदूच्या रचनेत हे शक्य नाही.) गणिताच्या उत्तेजनासाठी आयोजित करत असलेल्या अमेरिकेतील पुट्नाम स्पर्धेत1953 साली याच गृहितकाच्या आधारे वेगळ्या प्रकारे मांडणी करून 6 जणांच्या गटात तिघे मित्र तरी असतील वा तिघे अनोळखी तरी असतील हे सिद्ध करून दाखवा असा प्रश्न विचारला होता.
- Six degree of separation या संकल्पनेनुसार जगभरातील कुठल्याही दोन व्यक्तींच्या संपर्कासाठी परस्परांना ओळखणाऱ्या जास्तीत जास्त 6 जणांची गरज आहे. म्हणजेच प्रत्येक जण दुसऱ्यापासून सामान्यपणे 6 व्यक्तीपासून लांब आहे. माझा मित्र,

त्याच्या ओळखीचा , ओळखीच्याच्या ओळखीचा.. अशी ही साखळी आपल्याला दुसऱ्या व्यक्तीपर्यंत पोचवू शकते. जग हे किती लहान आहे याचा हा एक उत्कृष्ट नमूना आहे. Facebook व twitter च्या वापरावरून आपल्याला नक्कीच याचा अनुभव आला असेल.



- हे संस्थळ Six degree of separation या संकल्पनेची खिल्ली उडवणारे संस्थळ आहे. त्यातील गेमवर कुठल्याही दोन नट-नट्यांची नावे टंकित केल्यास त्यांचा (बादरायण) संबंध कशा प्रकारे जोडता येईल याची मजेशीर माहिती वाचायला मिळेल. (फक्त एकाच नावाचे 2 - 4 नट-नट्या असल्यास गेम क्लिष्ट होऊ शकतो.)
- एखाद्या राज्याच्या नकाशावर शहरांना जोडणाऱ्या रेषा काढत गेल्यास जास्तीत जास्त 6 रेषेत दोन शहरांना सहजपणे जोडू शकतो.
- फ्रेंच गणितज्ञ ॲड्रियन मारी लेजेंड्रे (1752 - 1833) यानी 6 ही संख्या 2 परिमेय संख्येच्या (rational number) त्रिघात स्वरूपात मांडता

येत नाही असे विधान केले होते.(परिमेय प्रकारच्या पूर्णांकी वा अपूर्णांकी संख्येत अंश व छेद दोन्ही पूर्णांकी असतात). परंतु हेन्री डड्नी (1857 -1930) यानी हे विधान

$6 = (17/21)^3 + (37/21)^3$ अशा प्रकारे मांडून खोटे करून दाखविले.

- हिमरेषांना (snowflakes) 6 भुजा असतात, याचा शोध केप्लर या खगोलशास्त्रज्ञाने 1611 साली लावला. नदीच्या पुलावरून जात असताना हे त्याच्या लक्षात आले. त्यावर त्यानी शोधनिबंध लिहून



रूडॉल्फ या सम्राटाला अर्पण केले. केप्लरच्या मते जगातील अनेक गोष्टी - फुलाच्या पाकळ्या, मधमाशांचे पोळ, ... इ.इ. - षट्कोनाच्या आकाराशी निगडित असतात. परंतु या शोधनिबंधातून त्याला अर्थप्राप्ती झाली नाही. कारण मुळातच हा सम्राट पैशाच्याबाबतीत फार कंजूस होता.

- six sigma ही एक उत्पादन प्रक्रियेतील उच्चतम गुणवत्ता राखण्यासाठी उत्क्रांत झालेली उत्पादन स्ट्रॅटेजी आहे. ही नीती उत्पादन प्रक्रिया व सांख्यिकी पद्धत यांच्यात मेळ घालून दोषमुक्त उत्पादन करण्याची हमी देते. सिक्स सिग्माच्या तज्ञांच्या मते प्रती 10 लाख उत्पादित वस्तूत केवळ 3.4 वस्तूत काही दोष सापडू शकतील.

(व या दोषयुक्त वस्तूंचासुद्धा पाठपुरावा करत ग्राहकांचे हित अबाधित राहतील याकडे लक्ष दिले जाते.)

- दोन समभुज त्रिकोनांना एकमेकाशी उलटे ठेऊन चित्रित केल्यास ज्यू धर्मीयांचा star of David तयार होतो.



- क्रिकेट खेळातील षट्कार, षटके सर्वांच्या (अती) परिचयाचे आहेत.
- आयुर्वेदात गोड, आंबट, खारट, कडवट, तिखट आणि तुरट असे सहा प्रकारच्या रुचींची यादी दिलेली आहे.
- तथाकथित अतींद्रिय शक्तीच्या संदर्भात sixth senseला फार महत्व प्राप्त झालेले आहे.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - सात (7)

- 7 ही एक अविभाज्य संख्या आहे.
- 7 ही एक भाग्यशाली संख्या (lucky number) आहे. भाग्यशाली संख्या ही एक गणितीय संकल्पना असून त्याचा भविष्य, फलजोतिष वा दैववाद इत्यादींशी संबंध नाही. संख्या सिद्धांतात (number theory) एराटोस्थेनिसची चाळणी (Sieve of Eratosthenes) लावल्यानंतर ज्या अविभाज्य संख्या उरतात त्यांना भाग्यशाली संख्या असे म्हटले जाते.

  भाग्यशाली संख्या काढण्याची रीत:

  1 पासून सुरुवात करून क्रमाने (sequence) अंक लिहावे:

  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,

  या क्रमातील प्रत्येक दुसरी संख्या (सम संख्या) गाळल्यास नवीन क्रम मिळेल:

  1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,

  या क्रमातील दुसरी संख्या 3 असल्यामुळे प्रत्येक तिसरी संख्या गाळल्यास हा क्रम मिळेल:

  1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25,

  या क्रमातील नंतरची संख्या 7 असल्यामुळे प्रत्येक सातवी संख्या गाळल्यास हा क्रम मिळेल:

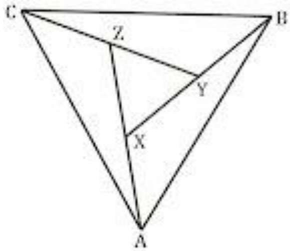
  1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25,

  याच अनुषंगाते करत गेल्यास अविभाज्य संख्यांचा क्रम मिळेल:

  2, 3, 5 ,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107,.....

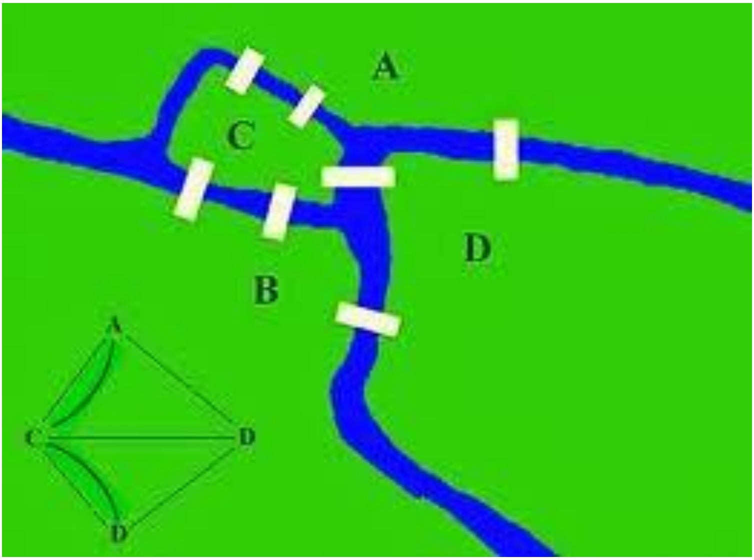
(1955 साली गार्डिनर, लाझारिस व इतर यांनी अविभाज्य संख्यांचा सिद्धात या शोधनिबंधातून ही मांडणी केली.या क्रमातील अविभाज्य संख्याना भाग्यशाली अविभाज्य संख्या असे म्हटले जाते.)

- **निर्दिष्ट ठिकाणाचे अक्षांश-रेखांश शोधण्यासाठी गोलीय त्रिकोनमितीतील (spherical Trigonometry) सात सात आकडी संख्याचा वापर होत असे. म्हणूनच नेपियरच्या NapLog (x) = $-10^7 \log (x/10^7)$ या समीकरणात 7 असा उल्लेख आहे. नेपियरचे हे टेबल्स नॅच्युरल लॉग म्हणून ओळखले जातात.**
- गणितातील catastrophe सिद्धांतानुसार (catastrophe theory) 7 प्रकारचे फल (functions) आहेत. एखादी गणितीय व्यवस्था संतुलित नसल्यास त्याची कारणमीमांसा या 7 फलांचा वापर करून केला जातो.
- क्ले मॅथेमॅटिकल इन्स्टिट्यूटने 2000 साली गणितातील अजूनपर्यंत न सुटलेल्या 7 समस्यांना उत्तर शोधणाऱ्यासाठी 10 लाख डॉलर्सच्या पारितोषकाची घोषणा केली आहे. यापैकी फक्त पॉइन्केर कंजेक्चर समस्येला ग्रिगोरी पेरिलमन (Grigory Perelman)याने 2010 साली योग्य उत्तर शोधले. परंतु इतर अनेक गणितज्ञ मानकरी *माझ्यापेक्षा मोठे आहेत* म्हणून त्यानी हे पारितोषक घेणे नाकारले.
- त्रिकोनाच्या बाजूंची लांबी दुपटीने वाढवून त्यांचे शिरोबिंदू जोडल्यास एक मोठा त्रिकोन तयार होतो. या मोठ्या त्रिकोनाचे क्षेत्रफळ मू ळ त्रिकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या 7 पट असते.



- 7 या संख्येपासून एक गमतीदार संख्या आपल्याला मिळते. 1/7 = 0.142857142857... यात 142857 ही संख्या नंतर नंतर पुन्ह पुन्हा येत राहते. 142857 याचा 1 ते 6 पर्यंतचा पाढा तयार केल्यास या संख्येतील अंकांचीच पुनर्जुळणी होत राहते.
  142857x 1 = 142857
  142857x2 = 285714,
  142857 x3 = 428571,
  142857x4 = 571428
  142857 x5 = 714285,
  142857 x6 = 857142 व शेवटी
  142857x7 = 999999
  असे मजेदार उत्तर येईल.म्हणूनच 142857 या संख्येला आवर्तनीय संख्या (cyclic number) असे म्हटले जाते.
  अशाच प्रकारचे वैशिष्ट्य 1/17 या अपूर्णांकातही सापडेल. 1/17 = 0.0588235294117647. यात 16 अंकी संख्या आहे. सामान्यपणे 1/p अपूर्णांकात (p-1) अंकानंतर संख्या पुनरावर्तित होत असल्यास त्या संख्येला आवर्तनीय संख्या (cyclic number) असे म्हटले जाते.

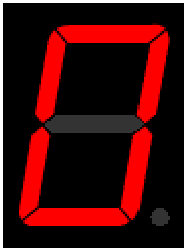
- कोनीग्स्बर्ग पुलाच्या (puzzle of seven bridges of



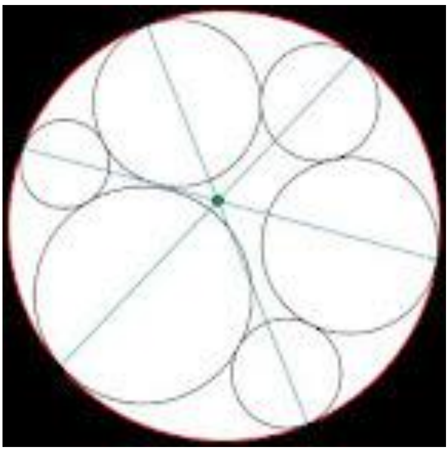
Konisgberg) कूटप्रश्नात नदीच्या मध्यावरील दोन बेटांपासून शहरात येण्याजाण्यासाठी 7 पूल आहेत.प्रत्येक पूल एकदाच एकदाच ओलांडत साती पुलावरून जाणे शक्य होईल का असा प्रश्न विचारला होता. या कोड्याची रचना लिओन्हार्ड ऑयलर (1707-1783) यानी केली होती. आलेख सिद्धांताचा उदय याच कूटप्रश्नातून झाला आहे.

- इतर संख्याप्रमाणे 7 या संख्येभोवती कुठलेही वैशिष्ट्य नसले तरी या संख्येचा वापर मानसशास्त्रीय चाचणीत होत असतो. विस्मृती वा स्मृतीभ्रंश असलेल्या रुग्णांना 100 तून 7 वजा करत जाण्याची ही चाचणी असते; 100, 93.86, 79, 72..... इ.इ. 4 वा 5 वजा करत जाण्यापेक्षा 7 ही संख्या मेंदूला श्रम देणारी ठरते.

- इलेक्ट्रॉनिक डिस्प्ले बोर्डवरील आकडे प्रदर्शित करण्यासाठी 7 प्रकाश नलिकेंचा वापर केला जातो. या नलिकांच्या रचनेतून 0 ते 9 पर्यंतचे अंक सहजपणे वाचता येतात.



- खालील आकृती 7 वर्तुळ प्रमेयाबद्दलची आहे. एका मोठ्या वर्तुळातील परिघाला स्पर्श करणाऱ्या व एकमेकानांही स्पर्श करणाऱ्या कुठल्याही आकाराच्या 6 वर्तुळाच्या समोरासमोरील स्पर्शबिंदूंना जोडून रेषा ओढल्यास त्या एकाच बिंदूत छेद घेतात. ही रचना कुठल्याही आकाराच्या लहान - मोठ्या वर्तुळाला पूर्णपणे लागू होते.



- अंतरराष्ट्रीय मानकसंस्थेने मीटर, किलोग्राम, सेकंद, ऍम्पीअर, केल्विन, मोल आणि कँडेला अशी 7 मापक (SI Units) निर्दिष्ट केलेले आहेत.
- जेम्स बाँडपटात मुख्य गुप्तहेराचा क्रमांक 007 असतो.
- आठवड्याचे सात दिवस, जगातील पुरातन व आधुनिक सात आश्चर्य, इंद्रधनुष्यातील सात रंग, संगीतातील सात स्वर, ख्रिश्चन धर्मीयांची सात पापांची (seven deadly sins) यादी, आकाशातील सप्तर्षी तारकासमूह, हिंदू-विवाह प्रसंगातील सप्तपदी, साता समुद्रापलिकडे, इ.इ. 7 या संख्येशी निगडित असलेल्या इतर काही गोष्टी.
- काही म्हणी:
  आपल्या कानी सात खडे
  सात सुगरणी, भाजी अळणी
  सात हात ढलपी, नऊ हात लाकूड

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - आठ (8)

- 8 ही फिबोनाकी (Fibonacci) संख्या आहे. फिबोनाकी संख्येतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या दोन पदांच्या बेरजेतून आलेली असते; 1,1 (0+1), 2 (1+1), 3(1+2), 5(2+3), 8 (3+5), 13 (5+8), 21 (8+13)..... या संख्याच्या मालिकेत 1 आणि 8 या दोन संख्याच फक्त त्रिघाताच्या स्वरूपात मांडता येतात. (1^3, 2^3)
- संख्या सिद्धांतात अष्टफलकीय संख्या (octahedral numbers) नावाची संकल्पना आहे. समान व्यास असलेल्या गोल मण्यांना घट्टपणे चिकटून बसवण्यासाठी किती गोल मण्या लागतील हे अचूकपणे शोधण्यासाठी अशा प्रकारच्या संख्यांचा उपयोग केला जातो. उदाहरणार्थ O_n ही अष्टफलकीय संख्या व n हा त्याचा क्रम असल्यास
-



$O_n = n/3 \times (2n^2 + 1)$ या सूत्रावरून संख्या काढता येते.
उदा - अष्टफलकीय संख्यांच्या क्रमातील 5 व्या संख्येसाठी
$O_5 = 5 \times (2 \times 5^2 + 1)/3 = 5 \times (2 \times 25 + 1)/3 = 51/3 \times 5 = 85$
वरील आकृतीत 146 चुंबकीय गोल मण्या वापरून अष्टभुजाकृतीची रचना केली आहे

काही अष्टफलकीय संख्या:

1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670, 891.......

- संगणकातील 1 byte मध्ये 8 bits असतात.
- संगणकातील आकडेमोडीसाठी नेहमीच्या दशमान पद्धतीऐवजी 8 या संख्येवर आधारित अष्टमान पद्धत (Octol Number system) वापरली जाते.
- गणितशास्त्रातील स्फेनिक *संख्या (Sphenic Number) ही एक धन संख्या असून अशी* संख्या तीन वेगवेगळ्या अविभाज्य संख्यांच्या गुणाकारातून तयार होते.
  उदाहरणार्थ
  30 = 2 x 3 x 5; 42 = 2 x 3 x 7; 66 = 2 x 3 x 11 .....
  विशेष म्हणजे अशा संख्यांचे अवयव नेहमी 8 असतात. उदा:
  30 चे अवयव: 1, 2, 3, 5, 6, 15, 10, व 15 (सामान्य नियम - n ही स्फेनिक संख्या p, q व r या 3 अविभाज्य संख्यांच्या गुणाकाराचे उत्तर असल्यास त्याचे 8 अवयव 1, p, q, r, pq, pr, qr, व n असे असणार)
  इतर काही स्फेनिक संख्या - 30, 42, 66, 70, 78, 102, 105,
- भौतिकीत (Particle physics) परमाणूंच्या विभाजनातून बाहेर पडणाऱ्या बॅरियन्स व मेसॉन्स या अवाणू कणांच्या (subatomic particles)गुणधर्मांचे वर्णन करताना Eightfold way हा शब्दप्रयोग केला जातो. प्रसिद्ध वैज्ञानिक, मरे गेल् मान (Murray Gell-Mann) याने पहिल्यांदा हा शब्दप्रयोग केला.

- एके काळी
  8 चिमूटभर = 1 चमचाभर,
  8 औंस = 1 कपभर
  8 पिंट = 1 गॅलन
  8 फर्लांग = 1 मैल
  अशी मोजण्याची पद्धत होती.
- बहुतेक देशात वाहतूक नियमातील STOP हे चिन्ह अष्टकोनाकृतीत लिहिले जाते. हा आकार गाडी मागे घेत असतानासुद्धा व्यवस्थितपणे दिसतो, असे तज्ञांचे मत आहे.



- पत्त्यांचा डाव मांडताना जर 7 वेळा पत्ते पिसल्यास 52 पानं व्यवस्थितपणे पिसल्या जातात, असा अनुभव आहे. परंतु 8 व्या वेळा पिसल्यास काही पानं पुन्ह पुन्हा येण्याची शक्यता आहे.
- कोळीष्टक तयार करणाऱ्या अष्टपाद (spider) कीटकाला 8 पाय व 8 डोळे असतात. अशाप्रकारे 8 पाय इतर कुठल्याही कीटक जातीत नाहीत.



- ऑक्टोपस या जलचर प्राणीला 8 संस्पर्षक (tentacles) आहेत.
- e mail सारख्या संगणक संपर्कासाठीच्या भाषेत H8 हा शब्द hate साठी वापरला जातो.
- 88 ही संख्या नाझींच्या गुप्त संघटनेच्या सदस्यांच्यातील एकमेकाच्या अभिवादनासाठीचा परवलीचा शब्द होता/आहे. Hail Hitlerमधील H हे अक्षर इंग्रजी बाराखडीत 8व्या क्रमांकावर असल्यामुळे 88 ही संख्या अभिवादनासाठी रूढ झाली असावी.
- 8 ही संख्या क्रीडा प्रकारात फार लोकप्रिय आहे.
  -नौकायान स्पर्धेत 8 स्पर्धकांचा सहभाग असतो.
  - जलतरण स्पर्धेतील तलावात वा पळण्याच्या शर्यतीच्या मैदानात 8 ट्रॅक्सची आखणी केलेली असते.
  - बुद्धीबळाचा पट 8x8 चौकोनांचा आहे.
- बिलियर्डच्या खेळप्रकारात 8 Ball हा पूल गेम फार मोठ्या प्रमाणात जगभर खेळला जातो.

- बौद्ध धर्मीयांच्या धर्मचक्राला 8 स्पोक्स (spokes) आहेत. हे 8 स्पोक्स उदात्त सत्यांना निर्देशित करतात.
- विजयनगरच्या कृष्णदेवरायच्या (1509–1529) दरबारात *अष्टदिग्गज* म्हणून 8 श्रेष्ठ तेलुगु कवींचा सन्मान केला जात होता.
- आयुर्वेद वैद्यक पद्धतीत रोगपरीक्षेसाठी नाडी, मल, मूत्र, जिव्हा, शब्द, स्पर्श, नेत्र आणि आकार ही साधनं आहेत
- स्वस्तिक हे आठ दिशाचे प्रतीक समजले जाते.
- अष्टलक्ष्मी, अष्टैश्वर्य, अष्टमुद्रा, अष्टदिक्पालक, अष्टांग, गंगाष्टक, मंगलाष्टक, अष्टविनायक, अष्टाक्षरी मंत्र, अष्टलवण, अष्टप्रधान, अष्टांग वैद्यक, अष्टपैलू, इत्यादींचा 8 या संख्येशी संबंध आहे.

●●●

हा खेळ संख्यांचा! - नऊ (9)

- 9 आणि 8 अशी 3^2 व 2^3 असलेली जोडी इतर कुठल्याही लागोपाठ असणाऱ्या संख्येत सापडणार नाही.
- एखादी संख्या 9 ने पूर्णपणे भागता येते की नाही यासाठी त्या संख्येतील आकड्यांची आडवी बेरीज करून 9 ने भागतात. शेष शून्य उरत असल्यास मूळ संख्येला सुद्धा 9 ने पूर्णपणे भागता येते. उदाहरणार्थ, 176328 या संख्येचे 9 विभाजक आहे की नाही हे शोधण्यासाठी प्रथम 1+7+6+3+2+8 = 27 ही बेरीज केली जाते. व या बेरजेचे 9 विभाजक असल्यामुळे 176328 या संख्येचासुद्धा 9 विभाजक आहे हे समजते.
- एखादी बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार वा भागाकार बरोबर आहे की नाही हे ओळखण्यासाठी casting out the nines ही पद्धत वापरली जाते.

बेरीज: 1428 + 5837 = 7265

1428 वा कुठल्याही संख्येतील 9, वा अंकांची बेरीज 9 असणारे अंक वगळून एक अंकी संख्या शोधावे. (अशा संख्यांना excesses असे म्हटले जाते.)

1428 चा excess (1+4+2+8 = 15; 15 (- 9)) 6, 5837 चा excess 5 आणि 7265 चा excess 2.

जे अंकगणितीय चिन्ह असेल त्याप्रमाणे excesses वरही प्रक्रिया केले जाते. या उदाहरणात 6+5= 11 (-9) = 2 आणि उत्तराचे excess ही 2 असल्यामुळे ही बेरीज बरोबर आहे असे म्हणता येईल.

अजून एक उदाहरण: 3264+8415+2946+3206 = 17831

त्यांचे excess 6 + 0 + 3 + 2 = 2

वजाबाकी: 8563 - 5432 = 3131

excess 4 - 5 = 8 (अशाप्रसंगी 4च्याऐवजी 4+9 = 13 घेवून excessची वजाबाकी करावी. 13-5=8) यावरून वजाबाकीचे उत्तर बरोबर आहे असे म्हणता येईल.

गुणाकार वा भागाकारालासुद्धा हीच चाचणी वापरून उत्तर बरोबर की चूक शोधता येईल.

मुळात हे एक उत्तर तपासण्यासाठीचे short cut आहे. परंतु आजकाल या कालबाह्य short cut ची (वा मुळात तोंडी वा लेखी, डोके वापरून, बेरीज, वजाबाकी इ, इ, करण्याची) गरजच उरलेली नाही. कारण मोबाइल, संगणक, वा कॅल्क्युलेटर वापरून उत्तराची अचूकता तपासता येते.

- 9 या संख्याचे अनेक गमतीजमती आहेत:

  9 चे पिरॅमिड्स -

  1 x 9 +2 = 11

12 x 9 +3 = 111

123 x 9 +4 = 1111

1234 x 9 +5 = 11111

.... असे

12345678 x 9 + 9 = 111111111 करता येईल

9 x 9 = 81

99 x 99 = 9801

999 x 999 = 998001

9999 x 9999 = 99980001

99999 x 99999 = 9999800001

9 x 0 + 8 = 8

9 x 9 + 7 = 88

9 x 98 + 6 = 888

9 x 987 + 5 = 8888

9x 9876 + 4 = 88888 ......

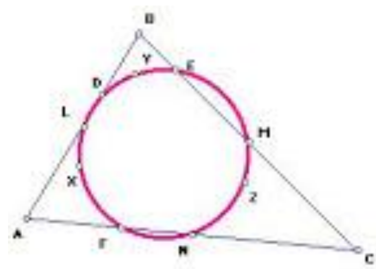
12345679 x 9 = 111111111

12345679 x 18 = 222222222

12345679 x 27 = 333333333 ....

- भूमितीत 9 बिंदूंचा वर्तुळ (Nine point circle) ही रचना प्रसिद्ध आहे. ही रचना लघुकोन, विशालकोन वा लंबकोन त्रिकोण वापरून करता येते. त्रिकोणातील काही मोजक्या रचनेतून मिळालेल्या 9 बिंदूतून वर्तुळ काढता येत असल्यामुळे त्याला हे नाव पडले आहे. याचा शोध लिओन्हार्ड ऑयलर (1707 - 1783) या गणितज्ञाने केला असावा; मात्र खात्री नाही.

A B C हा लघुकोन त्रिकोण असून L, M, N हे प्रत्येक भुजाचे मध्यबिंदू आहेत. A, B, C या बिंदूंपासून काढलेले शिरो लंबरेषा विरुद्ध बाजूच्या भुजावरील D, E, F या बिंदूंपाशी छेद घेतात. आणि या तिन्ही रेषा H या लंबसंपात बिंदूवरून जातात. AH, BH, CH या रेषांचे मध्यबिंदू X, Y, Z आहेत.



अशाप्रकारच्या रचनेतून मिळालेल्या D, E, F, L, M, N, X, Y, Z, या 9 बिंदूमधून एक वर्तुळ काढता येईल.

- मानवी प्राण्यामध्ये 9 महिन्याचा गर्भकाळ असतो. खरे पाहता हा काळ सुमारे 280 दिवसचा आहे. परंतु नेहमीच्या व्यवहारात सर्रासपणे 9 महिने असे म्हटले जाते. Naegele's rule चा वापर बाळंत होण्याचा अंदाजे दिवस समजून घेण्यासाठी वापरला जातो. या नियमाप्रमाणे शेवटच्या पाळीच्या दिनांकात एका वर्षाची बेरीज, त्यातून वजा 3 महिने व अधिक 7 दिवस या प्रमाणे निर्दिष्ट केल्यादिवशी बाळ जन्माला येईल. उदा,
  शेवटची पाळी = 8 जून 2011
  + 1 वर्ष = 8 जून 2012

- 3 महिने = 8 मार्च 2012

+ 7 दिवस = 15 मार्च 2012

(आजकाल नैसर्गिक बाळंतपणाऐवजी सिझेरियन डेलिव्हरीचा 'सोपा' मार्ग उपलब्ध असल्यामुळे या गोष्टी कालबाह्य ठरत आहेत.)

प्लॅटिनम, सोने, चांदी यासारख्या महागड्या धातूंची शुद्धता one nine fine (90 टक्के शुद्ध), two nines fine (99 टक्के शुद्ध) व three nines fine (99.9 टक्के शुद्ध) या 9 शी निगडित संख्येनी मोजली जाते.

- पदार्थात उष्णता, प्रकाश, स्थिरविद्युत, प्रवाही विद्युत, चुंबकत्व, यंत्रशक्ती, रासायनिक शक्ती व अणुशक्ती अशा प्रकारचे 9 नैसर्गिक शक्ती आहेत असा दावा केला जातो.
- चीनी संस्कृतीतील प्रचंड शक्ती व जादू-चमत्कारांचे प्रतीक असलेल्या ड्रॅगनचे 9 रूप आहेत व 9 गुणविशेष आहेत. त्याचप्रमाणे त्याला 9 अपत्य आहेत. त्याच्या अंगावर 117 खवले (scale) असून त्यातील 81 पुल्लिंगी व स्वर्गसदृश व इतर 36 स्त्रीलिंगी पृथ्वीसदृश आहेत असे समजले जाते. या सर्व संख्या 9 किंवा 9 चे गुणक आहेत.(117 = 9 x 13, 81 = 9 x 9, 36 = 9 x 4) या संख्यातील अंकांची आडवी बेरीजसुद्धा 9 असते. (1+1+7 = 9, 8+1 = 9, 3+6 = 9)
- दांतेच्या Divine Comedy या महाकाव्यात नरकाचे 9 वर्तुळं असल्याचा उल्लेख आहे.
- ग्रीक पुराणकथानुसार वेगवेगळ्या कलाप्रकारांचे 9 स्फूर्ती देवता (muses) आहेत. इतिहास, गाणे, नृत्य, सुखांत, दुःखांत, महाकाव्य इ.इ, विषयासाठी क्लिओ, पॉलिहिम्निया, टेर्प्सिकोर, थालिआ, कॅलिओप इ.इ स्फूर्ती देवता आहेत.

- बीथोवन या जगप्रसिद्ध पाश्चात्य संगीतकाराची Symphony 9 ही एक अभिजात संगीत रचना म्हणून ओळखली जाते. युरोपियन युनियनच्या राष्ट्रगीतासाठी हीच स्वररचना वापरलेली आहे.
- 9 11 (nine eleven) या वाक्प्रयोगाचा उल्लेख न्यूयॉर्क शहरावर अल् कायदा या दहशती संघटनेने 9 सप्टेंबर 2001 या दिवशी केलेल्या हल्ल्याची आठवण देते.
- आपल्या देशातील 100 या दूरध्वनी क्रमांकाप्रमाणे अमेरिकेत 911 हा क्रमांक संकटकालीन मदतीसाठी वापरला जातो.
- भारत सरकारच्या उपक्रमातील अती महत्वाच्या कंपन्यांना नवरत्न कंपन्या असे म्हटले जाते. त्यात BEL, BHEL, BPCL, GAIL, HAL, MTNL इत्यादी कंपन्यांचा समावेश आहे.
- विक्रमादित्याच्या दरबारातील नवरत्ने, नवरस, नवनाथ, नवग्रह, नवविधा भक्ती, इ.इ. 9 या संख्येशी निगडित आहेत

●●●

शून्य (0): संख्या आहेसुद्धा व नाहीसुद्धा!

गणितातील अनेक संकल्पना आपल्या बुद्धीच्या आवाक्याच्या बाहेर आहेत किंवा आपल्या दैनंदिन व्यवहारात त्यांचा काडी इतकाही उपयोग होत नाही म्हणून आपण त्याकडे नेहमीच दुर्लक्ष करत आलो आहोत. गणिताचे जगच अमूर्त अशा अनेक संकल्पनांवर आधारित असल्यामुळे ते अत्यंत भासमय, विस्मयकारक, अंतःप्रेरणेला कस्पटासमान समजणारी, तर्काच्या जंजाळात अडकवून ठेवणारी असे वाटण्याची दाट शक्यता आहे. परंतु या अमूर्त जगाची तोंडओळख करून घेतल्यास वा जमल्यास या संख्याजगाची सफर केल्यास आपण एखाद्या अलीबाबा सदृश गुहेत तर नाही ना असे वाटू लागेल. गणितातील अशाच काही संकल्पनांचा वेध घेण्याचा हा एक छोटासा प्रयत्न..

शून्य ही संख्या नाही असे तुम्हाला वाटत असल्यास काही हरकत नसावी. कारण संख्यांचा वापर मोजण्यासाठी असतो. व जेथे काहीच नसते तेथे मोजणार कसे?

मुळात माणूस प्राणी गेली पाच हजार वर्षे काही ना काही मोजण्याची प्रक्रिया करत आला आहे. परंतु शून्याच्या इतिहासाची सुरुवात क्रि. श .पू 1800च्या सुमारास झाली असून त्याची पाळेमुळे बॅबिलोनियन संस्कृतीत आढळतात. त्यावेळीसुद्धा 1 ते 9 आकड्याप्रमाणे, शून्याला पूर्णपणे संख्याचा दर्जा दिलेला नव्हता. 361 व 3601 यांच्यामधील फरक दर्शवण्यासाठी एक चिन्ह या स्वरूपात तेथे शून्य होता. स्थान दाखवणारे चिन्ह एवढेच त्याला महत्व दिले होते. शून्यासाठीची बॅबिलोनियन चिन्ह म्हणजे कर्णरेषेतील दोन बाण.

आताच्या अंड्याच्या आकाराचे चिन्ह, (0), इ.स. 800मध्ये वापरण्यात आले. इ.स. 520च्या सुमारास भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476-550) यांनी शून्यासाठी ब्राह्मी लिपीतील 'ख' या अक्षराची सोय केली. संख्येच्या एकम्,

दशम् हे स्थान दर्शवण्यासाठी ख चा वापर त्यानी केला होता. भारतीय गणितज्ञ, संख्या हे फक्त वस्तूंच्या मोजमापासाठीच नसून त्या अमूर्त स्वरूपातही असू शकतात यावर भर देत होते. ब्रह्मगुप्त (इ.स. 598 – 670) या खगोल शास्त्रज्ञाने संख्यारेषाची संकल्पना मांडून शून्याच्या डाव्या बाजूला ऋणसंख्या व उजव्या बाजूला धनसंख्या अशी मोजण्याची सोय केली होती.

पश्चिमेतील शास्त्रज्ञांना या गोष्टी समजून घेण्यासाठी पुढील काही शतके लागली. भारतीय गणिताचा प्रवास अरबस्तानातून युरोपात गेला. संस्कृतमधील ग्रंथांचा अरेबिकमध्ये व अरेबिकमधून इंग्रजीत अनुवाद होत होत शून्य ते सिफर ते झिरो हे ज्ञान युरोपमधील तज्ञापर्यंत पोचले. ऋण संख्यांचा दरवाजा शून्याजवळ आहे व कर्जाची वा अक्कलखाती जमा झालेल्या रकमेची नोंद शून्याच्या डाव्या बाजूला मांडता येते हे त्यांना फार उशीरा कळाले.

19व्या शतकात गणिताच्या मागील तर्कशास्त्राचा (Logic of Mathematics) अभ्यास करण्यात आला होता. त्यावेळी गिसेपे पीनो (Giuseppe Peano) या इटालियन गणितज्ञाने अंकगणितातील संख्यासंबंधींच्या गृहितकांचे नियमन करत असताना शून्य ही संख्या आहे असे ठामपणे प्रतिपादन केले. शून्याशिवाय भूमापन करणे वा ऋण – धन या संख्येतील फरक समजून घेणे जड ठरले असते, यावर त्याचा भर होता.

शून्याचे ‘स्थळ महात्म्य’ गणितज्ञांच्या लक्षात येऊ लागले. आणि संपूर्ण (गणितीय) जग शून्याच्या प्रेमात पडले. परंतु शून्याची महती सेट सिद्धांताच्या वेळी लक्षात आली. 1874 मधील एका संशोधन प्रबंधातून सेट सिद्धांताची कल्पना जिऑर्ग कँटर (1845 -1918) या गणितज्ञाने पहिल्यांदा मांडली. सेट सिद्धांत हा गणिताचा पाया समजला जातो. सेट म्हणजे एक अमूर्त भांडं वा पात्र. या भांड्यात काहीही ठेवता येते. हिमगौरी व सात बुटके या परीकथेतील

सात बुटक्यापासून आठवड्यातील सात दिवसापर्यंत काहीही. फक्त सेटची मांडणीचा संदर्भ देत असताना त्यातील घटकांचे स्वरूप काय आहे हे माहित असायला हवे. त्या सेटमध्ये सात दिवस वा बारा महिने किंवा धृतराष्ट्राची शंभर मुलं असू शकतील. त्याचप्रमाणे रिक्त सेटची मांडणी केल्यास त्यात शून्य घटक आहेत हे नक्कीच लक्षात येईल.

शून्याचे वैशिष्ट्य म्हणजे शून्याची कुठल्याही संख्येत बेरीज वा वजाबाकी केली तरी त्या संख्येत बदल होत नाही. एखाद्या संख्येला शून्याने गुणिल्यास उत्तर शून्यच येते. शून्याला एखाद्या संख्येना भागणे ही क्रिया विसंगत असे समजली जाते. शून्य म्हणजे काहीही नाही हे माहित असूनसुद्धा त्याचे अमुक अमुक तुकडे करा हे बुचकळ्यात टाकणारे विधान ठरेल. त्याचप्रमाणे एखाद्या संख्येला शून्याने भागाकार करणेसुद्धा वेडपटपणाचे ठरेल. उदाहरणार्थ, तुमच्या जवळ असलेल्या 24 नाण्यांचा शून्य घटकात विभागणी करणे निरर्थक ठरू शकेल.

●●●

अनंतता (∞): गणिताला तारक व मारक अशी संकल्पना

लक्ष, दशलक्ष, कोटी, दशकोटी, शतकोटी, परार्ध, शत परार्ध.. शत परार्ध + 1 .... अशा प्रकारच्या मोठ मोठ्या संख्यांची लहानपणी खेळलेली स्पर्धा आपल्याला नक्कीच आठवत असेल. परंतु मोठेपणी संसाराच्या रहाटगाडग्यात अडकून पडल्यामुळे अशा मोठ मोठ्या संख्यांचे कौतुक करणे आपण विसरून गेलो. व त्यातही इन्फिनिटी (∞) ही संख्या पुसटशी होत गेली. परंतु ∞ मुळात अस्तित्वात होती वा आहे का?

उदाहरणार्थ, आइन्स्टाइनच्या सापेक्षता सिद्धांतात काळ व अवकाश (space & time) अनंतापर्यंत विस्तार होत होत, कृष्ण विवरात विरून जातात अशी संकल्पना मांडलेली आहे. त्याच प्रमाणे कॅल्क्युलसमध्ये कुठलीही प्रक्रिया सातत्याने बदलत गेल्यास अवकाश व काळ यांची अनंतामध्ये विभागणी करणे शक्य होईल.

याचा अर्थ भौतशास्त्रज्ञांना इन्फिनिटीचे महत्व कळले व इतरांना नाही असा अर्थ होत नाही. जेव्हा खगोल शास्त्रातील समीकरणांची उत्तरं इन्फिनिटीच्या जवळ पास असतात तेव्हा हे खगोलशास्त्रज्ञ सिद्धांतांचीच पुनर्लेखन करतात!

जरी या गृहितकांना बाजूला सारले तरी गणितातील सेट सिद्धांत मात्र इन्फिनिटीला चिकटून आहे. संख्यासंबंधी कठोरपणे विश्लेषण करत गेल्यास गणितातील हे अमूर्त भांडं कुठल्याही संख्याबद्दल जास्त विस्ताराने सांगू शकेल. शून्य सेटबद्दलचा आपला अनुभव ताजा आहे. सर्व संख्यांचे एक सेट आहे असे कल्पना करता येईल. मग हा सेट किती मोठा असू शकेल? तुम्ही कितीही मोजत गेला तरी त्या संख्या संपणार नाहीत व शेवटी आपण कंटाळून अनंतापर्यंत असे म्हणत त्याचा नाद सोडणार!

परंतु 1924 साली मांडलेल्या हिल्बर्टचे काल्पनिक हॉटेल याला छेद देणारा ठरू शकेल. कारण हिल्बर्टने त्या हॉटेलमध्ये इन्फायनेट खोल्या आहेत अशी मांडणी केली आहे. जेव्हा या सर्व खोल्या पूर्ण भरल्या तेव्हा कुठून तरी कित्येक बसलोड भरून प्रवासी आले व खोल्यांची मागणी करू लागले. हॉटेलच्या मॅनेजरने ही समस्या कशी हाताळली असेल?

आपली अंतःप्रेरणा हे शक्य नाही असे म्हणेल. परंतु गणिताला व विशेष करून इन्फिनिटीला हे मान्य असणार नाही. मॅनेजरच्या मते ही समस्या सोडवणे शक्य आहे. त्यासाठी खोली नं 1 मधल्या प्रवाश्याला खोली नं 2 मध्ये, 2 मधल्याला 4 मध्ये, 3 मधल्याला 6 मध्ये असे हलवल्यास सर्व विषम संख्यांच्या खोल्या रिकामे होतील व आगंतुक प्रवाश्यांची रहायची व्यवस्था करता येईल.

काही अनंत संख्या इतर अनंत संख्यापेक्षा मोठ्या असू शकतात. यावरून सेटमधील संख्या कितीही वेगवेगळ्या प्रकारच्या असल्या तरीही त्या अनंतापर्यंत पोचतात. सेट सिद्धांताला अशा विसंगत गोष्टींची चांगलीच सवय जडली आहे. गंमत म्हणजे पूर्ण संख्यांची यादी अनंतापर्यंत जाते, एवढेच नव्हे तर त्या संख्यांचे दशांशसुद्धा अनंतापर्यंत जाऊ शकतात!

तर लहानपणच्या मोठ्या संख्येच्या स्पर्धेप्रमाणे लहानातील लहान संख्येची स्पर्धा ठेवायची का?

●●●

सुवर्ण गुणोत्तर (φ) – एक शानदार संख्या

फिबोनाची क्रमिका

काही तज्ज्ञांच्या मते विश्वरचनेमध्येच एक सुप्त गणित भरलेले वा दडलेले दिसेल. सजीवांची शरीररचना वा या सजीवांनी निर्माण केलेल्या वस्तू यांच्यामध्ये वा निसर्गातील झाडं, पानं, फुलं, फळं इत्यादीमध्येसुद्धा लक्षपूर्वक शोधल्यास एका प्रकारचे गणित सापडेल, असे तज्ज्ञांचा विश्वास आहे. या विधानाच्या पुष्ट्यर्थ गणितज्ञ नेहमीच फिबोनाची क्रमिका आणि सुवर्ण गुणोत्तर यांचे पुरावे म्हणून सादर करतात.

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,.... अशा संख्याची क्रमिका फिबोनाची क्रमिका म्हणून ओळखली जाते. या क्रमिकेत मागील संख्येच्या बेरजेतून पुढील संख्या मांडली जाते. उदाः 3,5,8,13,21,34... मध्ये 8 ही संख्या 5 व त्यामागील 3च्या बेरजेतून, 13 8+5च्या बेरजेतून, 21 ही 13+8च्या बेरजेतून, 34 ही संख्या 21+13च्या बेरजेतून आलेले असतात. झाडाची पानं, सूर्यमुखी फुलातील बियांची रचना यात फिबोनाची क्रमिका सापडते. निसर्गातील अशा अनेक गोष्टीमध्ये फिबोनाची क्रमिका सापडतात.

परंतु या क्रमिकेत आणखी एक गंमत दडली आहे. पुढील व मागील संख्याचे गुणोत्तर काढत राहिल्यास उत्तरोत्तर हे गुणोत्तर 1.618च्या आसपास असेल. या गुणोत्तराला सुवर्ण गुणोत्तर या नावाने गणितज्ञ ओळखतात व याचे चिन्ह म्हणून ग्रीक लिपीतील φ या अक्षराचा वापर करतात. सुवर्ण गुणोत्तर हा गणितातील एक भन्नाट प्रकार आहे असे म्हणता येईल. अबक या सरळ रेषेवरील ब हा बिंदू अब/बक = अक(अब+बक)/अब या समीकरणाची पूर्तता करत असल्यास त्या गुणोत्तराला सुवर्ण गुणोत्तर म्हटले जाते. हे गुणोत्तर साधारणपणे 1.618च्या जवळपास असेल. फिबोनाची क्रमिकेतील 55/34 =

(55+34)/55 = 1.61818..., किंवा (89+55)/89 = 1.617977... किंवा (233+144)/233 = 1.618025... इत्यादी आकड्यामध्ये हा गुणोत्तर डोकावतो.

φ चे मूल्य

a आणि b या दोन संख्यांची मांडणी सुवर्ण गुणोत्तराप्रमाणे केल्यास

$(a + b)/a = a/b = \varphi$,

$b/a=1/\varphi$

$1+b/a = 1+ 1/\varphi = \varphi$

$\varphi +1 - \varphi^2 = 0$

$\varphi^2- \varphi -1 = 0$

$\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887$

हा चमत्कारिक गुणोत्तर आपल्याला भूमितीच्या अनेक रचनामध्ये बघावयास मिळेल. समभुज पंचकोनातील समोरासमोरील दोन शिरोबिंदूना जोडलेल्या कर्ण रेषेला भुजाने भागिल्यास हा गुणोत्तर मिळतो. समभुज त्रिकोनाच्या आतील बाजूला तिन्ही भुजांना स्पर्ष करणारे वर्तुळ काढल्यास त्यातही हा गुणोत्तर सापडेल. समदशभुजाकृतीतही हे गुणोत्तर मिळेल. याच गुणोत्तराचा उपयोग करून काढलेल्या त्रिकोनाला ‘गोल्डन ट्रँगल’ आणि आयताकाराला ‘गोल्डन रेक्टँगल’ म्हणतात.

सौंदर्याची मोजपट्टी

गणितातील संख्यांची करामत म्हणून याकडे दुर्लक्ष करता येत नाही, हेही तितकेच खरे. इंटरनेटवर शोध घेतल्यास या गुणोत्तराचे आपल्या दैनंदिन जीवनात मोठ्या प्रमाणात केला आहे हे लक्षात येईल. सोळाव्या शतकातील केप्लर हा खगोलशास्त्रज्ञ या सुवर्ण गुणोत्तराच्या चमत्कारामुळे भारावून गेला

होता. मध्ययुगातील अनेकानी सुवर्ण गुणोत्तराला दैवीशक्तीचा दर्जा दिला होता. एका मानसशास्त्रज्ञाने त्या काळच्या खिडक्या, फोटोफ्रेम, क्रॉसेस, अभिनंदन पत्रं, आरसे, पुस्तकं, तैलचित्र, वेगवेगळया आकारच्या चौकटी इत्यादींचे मोजमापाचा अभ्यास केला. बहुतांश गोष्टीत या गुणोत्तराचा वापर केलेला होता, हे त्याला आढळले. पेंटिंग्समध्ये काढलेल्या पुरुष व स्त्रियांच्या शरीर रचनेतही हा गुणोत्तर होता. सौंदर्याच्या मोजपट्टीचा दर्जा याला मिळाला होता. त्यामुळे प्राचीन ग्रीक, इटॅलियन संस्कृतीत या गुणोत्तराचा वारेमाप उपयोग केला असेल, असे म्हणण्यास वाव आहे.

परंतु सौंदर्य हे नेहमीच सापेक्ष असल्यामुळे गणिताच्या पदावलीतून वा समीकरणातून व्यक्त करणे किंचित धाडसाचे ठरेल. मुळात ग्रीक अभिजनांचे मन या गुणोत्तरावर जडलेले असावे म्हणून दिसेल त्या ठिकाणी याचा वापर त्यांनी केला असावा. या सुवर्ण गुणोत्तराव्यतिरिक्तही गणितात अनेक मजेदार गोष्टी आहेत हे आपण विसरू शकत नाही.

●●●

ऑयलर संख्या (e): ठेवीची रकम वाढतच का जात नाही?

बँकेत काही पैसे ठेव म्हणून ठेवल्यास बँक आपल्याला व्याजासकट काही रकम ठराविक मुदतीनंतर देते. समजा आपण एक हजार रुपये मुद्धल म्हणून बँकेत ठेवल्यास व बँकेचे सरळ व्याजाचे दर दरवर्षी 100 टक्के असल्यास वर्षाच्या शेवटी दोन हजार रुपये खात्यात जमा होतील. यात काही गुंतागुत नाही हे आपल्या लक्षात आले असेल. परंतु ठेवीवर मिळणारे व्याज वर्षाच्या शेवटी न देता दर सहा महिन्यानी द्यायचे ठरवल्यास वर्षाच्या शेवटी मिळणाऱ्या रकमेत फरक दिसेल. म्हणजेच 1000 रुपयाला सहा महिन्यानंतर व्याजासकट 1500 रुपये व वर्षाच्या शेवटी 2250 रुपये.

भगवान देता है तो छप्पर फाडके देता है..

समजा दर सहा महिन्याऐवजी दर तीन महिन्यानी व्याज द्यायचे ठरवल्यास वर्षाच्या शेवटी 2610 रुपये मिळतील. आणि हाच क्रम पुढे नेत नेत दर महिन्याला, दर आठवड्याला, दर दिवशी, दर तासाला, दर मिनिटाला ... असे काही करत गेल्यास फार मोठे घबाड मिळेल असे वाटण्याची शक्यता आहे. परंतु गणितीय सिद्धांताप्रमाणे अगदी सेकंदाच्या अवधीने व्याज दिले तरी ही रक्कम 2718 व काही चिल्लर असणार. म्हणजेच 1000 या मूळ ठेवीला 2.71828 याने गुणिल्यास मिळेल ती रकम! याच संख्येची मांडणी गणितज्ञ e या चिन्हाने करतात.

चक्रवाढीचे सूत्र:

$$FV = PV\,(1+r/n)^{n}$$

यात FV *= भविष्यात मिळणारी रकम,* PV *= मुद्दल,* r *= व्याजाचा दर (दशांशामध्ये)* n *= कालावधी*

या समीकरणात $x = n/r$ बदल केल्यास r/n, $1/x$ होईल व n, xr होईल त्यामुळे $(1+r/n)^n$ समीकरण $(1+(1/x))^{xr}$ असे लिहिता येईल. परंतु e च्या सूत्रात n वाढत जाणार. व x इन्फिनिटीला पोचल्यास $(1+(1/x))^{xr}$ चे मूल्य e^r होईल.

2.71828…. ही संख्या π (पाय) प्रमाणे एक अपरिमेय संख्या आहे. या पदातील दशांशाच्या पुढचे आकडे कधीच संपत नाहीत. लिओनाह्रर्ड ऑयलर या स्विडिश गणितज्ञाने ही संकल्पना प्रथम मांडली. त्यामुळे या संख्येला ऑयलर संख्या असेही म्हटले जाते. परंतु ऑयलरपूर्वीसुद्धा ही संकल्पना काही गणितज्ञांना माहित होती.

नेपियरच्या लोगॅरिदमिक टेबलच्या संदर्भातील एका शोधनिबंधाला जोडलेल्या परिशिष्टात e या संख्येचा पहिल्यांदा उल्लेख झाला. 1624 मध्ये ब्रिग्स या गणितज्ञाने बेस 10 च्या लॉग टेबलचा उल्लेख करताना e चा साधा उल्लेखही केला नव्हता. 1647 साली सेंट व्हिन्सेंट यानी चौकोनी हायपरबोलाचे क्षेत्र काढत असताना e चा वापर केला. त्याला चौकोनी हायपरबोला व लोगॅरिदम यांचा एकमेकाशी संबंध आहे की नाही हेही माहित नसेल. परंतु 1661 साली ह्युजेन्स याला मात्र चौकोनी हायपरबोला व लोगॅरिदम यांचा एकमेकाशी असलेल्या संबंधाची कल्पना होती. ह्युजेन्स यानीच e चे मूल्य शोधताना बेस 10च्या लॉग टेबलचा वापर करून 17 दशांशापर्यंत त्याची मांडणी केली होती. परंतु त्यालाही e चे महत्व कळलेले नव्हते. 1683मध्ये जॅकोब बेर्नोली यानी $(1 + 1/n)^n$ चे लिमिट शोधताना या समीकरणात n ची किंमत इन्फिनिटी पर्यंत गेल्यास काय होईल याचा शोध घेत असताना समीकरणाची किंमत 2 व 3च्या मध्ये असेल हे त्याच्या लक्षात आले. 1684मध्ये जेम्स ग्रेगरी यानी मात्र लोगॅरिदम व घातांक यात संबंध आहे हे निश्चित विधान केले. 1690 मध्ये लेब्निट्झ यांनी ह्युजेन्सला लिहिलेल्या

पत्रामध्ये b हे अक्षर वापरून गणितासंबंधी काही माहिती दिली होती. परंतु हे b म्हणजेच e हे नंतर लक्षात आले. त्यानंतर ऑयलर यांनी e चा वापर करून काही गणितीय समस्यांची उत्तरं शोधली. त्यामुळे eला ऑयलर संख्या म्हणूनही ओळखले जाते.

e चे सूत्र:

e चे मूल्य काढण्यासाठी $(1 + 1/n)^n$ *या सूत्राचा वापर केला जातो. त्यात n जस जसा मोठा होत जाईल तस तसे त्याचे मूल्य e (=2.71828..) च्या जवळपास येईल.*

n = 1 असल्यास $(1 + 1/n)^n = 2$, *n = 2 असल्यास* $(1 + 1/n)^n = 2.25$, *5 असल्यास 2.48832, 10 असल्यास 2.59374, 100 असल्यास 2.70481, 10000 असल्यास 2.71815, 100000 असल्यास 2.71827... अशा प्रकारे e च्या जवळ पास येईल.*

ऑयलर संख्या फक्त चक्रवाढीच्या हिशोबासाठीच्या संदर्भातच वापरतात असे नाही. काल्पनिक संख्या i व π या अपरिमेय संख्यांचा e शी संबंध जोडणारे $e^{i\pi} + 1 = 0$ गणिती जगातील एक आश्चर्यकारक समीकरण म्हणून ओळखले जाते. (हा एक वेगळाच लेख होऊ शकेल!) यात 0,1, i , π, व e यांना एकमेकाशी जोडणारे ऑयलर आयडेंटिटी हे समीकरण एक साधे, सरळ व शानदार समीकरण आहे. मोठमोठ्या संख्यांचे गुणाकार/भागाकार करण्यासाठी कॅल्क्युलेटर्स व संगणक यांचा शोध होण्यापूर्वी, e ला बेस समजून तयार केलेले नॅच्युरल लॉग टेबल (व नंतर बेस 10 चे लॉग टेबल,) फार मोठ्या प्रमाणात वापरात होते. कदाचित माणसाने चंद्रावर पाठवलेल्या अपोलो 11 या अवकाशयानाच्या अभियांत्रिकी रचनेसाठी लॉग टेबल्सचाच वापर झाल्याची शक्यता नाकारता येत नाही.

खरे पाहता e ही संख्या वाटते तेवढी क्लिष्ट नाही. e^x असलेल्या पदावलीचे (त्यातील स्थिर संख्या डावलून) इंटिग्रेशन केल्यास त्याचे उत्तर e^x येईल. हे फक्त e^x किंवा e^x च्या साधारण विभाज्याच्या संदर्भात होऊ शकते. त्यामुळे गणितातील संज्ञांच्या पार्टीत e^x हे कुठे तरी एका कोपऱ्यात कुणाशीही न मिसळता उभे असलेले दिसेल!

चक्रवाढीप्रमाणे e^x चा वापर व्यवहारात अनेक ठिकाणी दिसेल. हवेचा प्रतिरोध, वेगवेगळ्या उंचीवरील हवेचा दाब, विद्युत मंडलातील कंपन, इलेक्ट्रॉन्सचे वायूतील गती, रेडियमसारख्या आण्विक मूलवस्तूंचे क्षयदर, रासायनिक प्रक्रियेच्या वेगाचे नियंत्रण, विद्युत चुंबकीय प्रक्रियेतून होणारे वीज उत्पादन अशा कित्येक ठिकाणी e^x व x^n ही सूत्रे उपयोगात आणल्या जातात. ऑयलर संख्येचा वापर व्यवहारातील काही क्लिष्ट समस्या सोडवण्यासाठीसुद्धा केला जात आहे. एक्स रे क्रिस्टलेग्राफीच्या अभ्यासकांना स्फटिकांचे गुणधर्म शोधताना फोरियर विश्लेषणाचा आधार घ्यावा लागतो. त्यासाठीच्या फोरियर विश्लेषणात e ही संख्या प्रामुख्याने आढळते. त्याचप्रमाणे जनुकशास्त्रातील काही क्लिष्ट विश्लेषणातसुद्धा ऑयलर संख्येचा वापर होत आहे.

●●●

कल्पित संख्या (i): एक वेगळेच जग

गणितातील नियमाप्रमाणे +1ला +1ने गुणिल्यास त्याचे उत्तर +1 येते. त्याप्रमाणे -1ला -1ने गुणिल्यास त्याचे उत्तरसुद्धा +1 असते. जर हेच खरे असल्यास -1 हा वर्ग मिळण्यासाठी आपल्याला कुठल्या संख्येची निवड करावी लागेल? हे काही कोडं नसून ही सर्व प्रक्रिया फक्त काल्पनिक आहे हे लक्षात आणून देण्यासाठी सुचलेला प्रश्न आहे.

बॅबिलोनियन गणितज्ञांनी वास्तव संख्यांच्याबद्दलच्या नियमांची मांडणी करताना x^2=4 या समीकरणाचे उत्तर (+2) x(+2) किंवा (-2) x(-2) आहे या पद्धतीने करत होते. परंतु x^2=(-4) असल्यास नेमके काय करावे याची त्यांना कल्पना नव्हती. पुढे सातव्या शतकात भास्कर या भारतीय गणितज्ञाने एखाद्या संख्येला त्याच संख्येने गुणिल्यास त्या संख्येचा वर्ग येतो याचा शोध लावला. हाच धागा पकडून ब्रह्मगुप्त या गणितज्ञाने संख्येचा वर्गमूळही काढता येते असे विधान केले. व त्याच्या या पद्धतीला विलोमगती हे नाव त्यानी दिले. परंतु त्याच्याही समोर x^2=(-4) या टाइपचे समीकरण होते व ते निरर्थक म्हणून त्यांच्याकडे दुर्लक्ष केले. पुढे 16 व्या शतकातील रॅफेल बोंबेली या गणितज्ञाने -1च्या वर्गमूळाला संख्याचा दर्जा देत काही समीकरण सोडवण्याचा प्रयत्न केला. कार्ल फ्रेडरिक् गॉस यानी या अभ्यासात भर घातली व हॅमिल्टन यानी √-1 च्या आधारे कॉम्प्लेक्स संख्याची शाखा उभारली.

ऋण संख्यांच्या वर्गमूळाला कल्पित संख्या (imaginary number) असे म्हटले जाते. 1631 साली रेने देकार्ते या गणितज्ञाने ऋण संख्येचे वर्गमूळ कल्पित संख्या असते ही कल्पना प्रथम मांडली.18व्या शतकात त्याला एक संज्ञा म्हणून i हे चिन्ह सुचवण्यात आले व i हे -1चे वर्गमूळ आहे हे जगन्मान्य झाले. त्यामुळे i x I = -1 चा वापर मोठ्या प्रमाणात गणितात होऊ लागला.

बीजगणितातील समीकरण सोडवत असताना घातांक 2 असलेले समीकरण सुलभपणे सोडवता आले. $x^2=4$ या समीकरणातील x चे मूल्य = +2 वा -2 असू शकते. परंतु $x^2+5 = 0$ हे समीकरण सोडवताना x चे मूल्य -5 चे वर्गमूळ असेल. $\sqrt{-5}$ हे गणितीयदृष्ट्या विसंगत वाटू लागल्यामुळे त्यावर तोडगा काढण्यात आला. आणि कल्पित संख्यांचा वापर होऊ लागला. त्यामुळे $\sqrt{-5}$ ही संख्या $i\sqrt{5}$ असे लिहिले गेले. आणि या काल्पनिक संख्येच्या कल्पनेतून कॉम्प्लेक्स संख्यांचे जग उभारण्यात आले. 2 पेक्षा जास्त घातांक असलेले समीकरण सोडवणे यामुळे शक्य झाले. समीकरण सोडवताना काही गुणकांची कॉम्प्लेक्स संख्येच्या स्वरूपात मांडणी करण्यात आली. त्यातील एक भाग वास्तव संख्यांचा व दुसरा भाग काल्पनिक संख्यांच्या (म्हणजे i ने गुणिलेला) अशी विभागणी करण्यात आली. या कॉम्प्लेक्स संख्यांची मांडणी भूमितीच्या स्वरूपात मांडत असताना क्ष अक्षावर वास्तव संख्या आणि य अक्षावर कल्पित संख्या ही मांडणी रूढ झाली. क्ष आणि य अक्षाचा छेद शून्यापाशी दाखवण्यात आला.

गंमत अशी आहे की संपूर्ण गणित शास्त्रच काल्पनिक असताना त्यात पुन्हा अजून एका कल्पित संख्येची भर घालणे वा कल्पित संख्यांचे एक काल्पनिक जग निर्माण करण्यात हशील नाही. 1843 मध्ये आयरिश गणितज्ञ हॅमिल्टन यानी iच्या पुढील j व kची भर घातली आणि x, y अक्षाबरोबर z अक्षाची भर घालून त्रिमितीची निर्मिती केली. आजकालच्या संगणकाच्या 3D गेम्ससाठी या गोष्टी सर्रासपणे वापरल्या जात आहेत.

त्यामुळे i, j व k पर्यंतच न थांबता याच्याही पुढे जात आपण काल्पनिक जगाचा विस्तार करू शकतो का? या प्रश्नाला उत्तर नाही.

●●●

अर्किमिडिस स्थिरांक 'पाय्' (π): भूमितीचा आधारस्तंभ

10 वी 12 वीपर्यंत शाळा शिकलेल्यांनासुद्धा पाय् (π) ही संज्ञा नवीन नाही. वर्तुळाचा व्यास वा त्रिज्येवरून वर्तुळाचे परिघ व क्षेत्र काढण्यासाठी या संज्ञेचा वापर केला जातो. (निदान एवढे तरी बहुतेकांना माहित असण्याची शक्यता आहे.)

ग्रीक मूळाक्षरातील 'प' साठी वापरात असलेली ही संज्ञा आता जवळ जवळ अंक म्हणूनच ओळखला जात आहे. या अंकाचे मूळ शोधणे तितकेसे कठिण नाही. पुरातन काळच्या इजिप्त, भारत, बॅबिलोनिया व ग्रीक येथील भूमितीचे जाणकार कुठल्याही वर्तुळाचा परिघ व त्याचे व्यास यातील गुणोत्तर स्थिर असते असे ढोबळमानाने ओळखत होते. काही इतिहासकारांच्या मते ग्रीक येथील अर्किमिडिस यानी π चे मूल्य शोधण्यासाठी परिघ - व्यास गुणोत्तराऐवजी वेगळी पद्धत वापरली. म्हणूनच याला अर्किमिडिस स्थिरांक असेसुद्धा म्हटले जाते. प्लुटोसारख्या प्रचंड आकाराच्या ग्रहापासून बोटात मावणाऱ्या आंगठीच्या बारीक सारीक वर्तुळाकार वस्तूंचे परिघ/क्षेत्र मोजण्यासाठी हा एकमेव गुणोत्तर असून त्याचे मूल्य सुमारे 3.14 (22/7) आहे हे जगन्मान्य झालेले आहे. यावरून वर्तुळाचा परिघ त्याच्या व्यासाच्या तिप्पटीपेक्षा थोडेसे जास्त असते हे लक्षात येते. आपल्याला जमीनीवर 10 मी परिघ असलेले वर्तुळ काढायचे असल्यास दोरी, खुंटी व खडूच्या सहाय्याने व या गुणोत्तराच्या मदतीने सहजपणे काढता येईल. 10 मी परिघ असल्यास 10 = 3x 3.3 (व्यास) = 3 x 2 x 1.65 (त्रिज्य) 1.65 मी लांबीच्या दोरीचे एक टोक खुंटीला व दुसरे टोक खडूला बांधून दोरी ताठ करून खुंटीभोवती फिरविल्यास 10 मी लांबीचा परिघ असलेला वर्तुळ काढता येईल.

परंतु वर्तुळाचा परिघ जास्तीत जास्त अचूकपणे मोजण्याचा प्रयत्न केल्यास गुणोत्तर π सुद्धा जास्तीत जास्त अचूक असणे आवश्यक आहे. इजिप्शियन्स π चे मूल्य म्हणून 25/8 व बॅबिलोनियन्स 256/81 ही संख्या वापरत होते. भारतातील शुक्ल यजुर्वेदातील शतपथ ब्राम्हण मध्ये ही संख्या 339/108 (= 3.139) आहे. 2009 साली संगणकाच्या मदतीने π चे मूल्य 1,240,000,000,000 अंशापर्यंत मोजला गेला. गंमत म्हणजे 0 ते 9 आकडे असलेल्या या अपूर्णांकात कुठल्याही संख्येची पुनरावृत्ती झाली नाही. संख्या पुन्हा पुन्हा आल्या नाहीत. जर या गुणोत्तराचे मूल्य अनंत (infinity) अंशापर्यंत काढत गेल्यास या अपूर्णांकात कुठे ना कुठे तरी आपल्यातील प्रत्येकाचा मोबाइल क्रमांक, क्रेडिट कार्ड क्रमांक वा जन्मतारीख नक्कीच मिळेल. यासारखे वैशिष्ट्य इतर कुठल्याही साध्या अपूर्णांकात मिळणार नाही. एखाद्याची उंची जास्तीत जास्त अचूकपणे मोजण्याचे ठरवल्यास कदाचित ती 170.236283945 सें मी असे काही तरी असू शकेल व यानंतर ते तेथेच थांबून जाईल. किंवा यात आणखी काही आकडे जोडण्याचा प्रयत्न केल्यास त्या बहुतेक 00000.... असतील. इजिप्शियनांचा 25/8 = 3.125 नंतर आकडे थांबतील. फार फार तर आपल्याला 3.125000000 असेही लिहिता येईल. हे शून्य हजारो कोटी वेळा लिहूनही मूल्यात काही फरक पडणार नाही. कितीही प्रयत्न केले तरी नंतरच्या भागात शून्यव्यतिरिक्त दुसरा कुठलाही आकडा तेथे दिसणार नाही.

म्हणूनच π या संख्येला अपरिमेय अंक (irrational number) असे म्हटले जाते. (जी संख्या पूर्णांकाच्या रूपाने व/वा दोन पूर्णांकाच्या भागाकाराने, म्हणजेच अपूर्णांकाच्या रूपाने, व्यक्त करता येत नाही ती संख्या. उदा - π,

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$..इ.इ) याचा अर्थ ही संख्या पूर्ण संख्येच्या गुणोत्तराच्या स्वरूपात मांडता येत नाही. अशा प्रकारच्या संख्या गणित क्षेत्रात विपुल प्रमाणात वापरात आहेत.

भूमितीच्या संदर्भात π संख्या रूढ असली तरी विज्ञानाच्या इतर क्षेत्रातही या संख्येचा वापर होत आहे. गिझा येथील पिरॅमिड्स बांधणाऱ्यांना π चे मूल्य माहित होते, असा दावा केला जातो. क्वांटम भौतिकीतील प्लॉंक स्थिरांकाच्या संदर्भात याचा वापर होतो. वर्तुळाच्या क्षेत्राएवढा क्षेत्र असलेला चौकोन काढणे (squaring the circle) हे आव्हान आजपर्यंत कुणी स्वीकारले नाही. आइन्स्टाइनने याचा वापर नदीच्या लांबीच्या संदर्भात करता येतो असे शोधून काढले आहे. वाकडेतिकडे वाहणाऱ्या नदीचे वास्तविक अंतर व नदीच्या उगमापासून संगमापर्यंतचे थेट अंतर याचे गुणोत्तरसुद्धा π एवढे असते, असे त्यानी पहिल्यांदा सुचविले. नदीचा बाक जास्त असल्यास किनाऱ्यावरील मातीची धूप होण्याची शक्यता जास्त. जास्त धूप होत असल्यास नदी जास्त वेगाने वाहणार. जास्त वेगामुळे धूप होतहोत नदीचा बाक वाढत जाणार. या चक्रातून सुटका करून घेण्यासाठी निसर्गाने काही मर्यादा आखून दिल्यासारखे नद्या वाहतात, असे वाटते. व ही मर्यादा π गुणोत्तरात आहे, असे आइन्स्टाइनला वाटले. ब्राझिल व सैबेरिया मधील समपातळीवरून वाहणाऱ्या नद्यांच्या बाबतीतील आकडेवारी या गृहितकाला पुष्टी देत आहे. π च्या मूल्याचा आधारावरून अनेक सिद्धांत व प्रमेय गणित विश्वात वापरात आहेत.

गणिताशी संबंध येत नसलेल्यांना या सर्व गोष्टी कंटाळवाणे वाटतील. रोजच्या वापरातील गोल गोल नाणी, कारमधील स्टिअरिंग व्हील, आकाशात दिसणारे सूर्य - चंद्र वर्तुळाकारात असूनही त्यांचे व्यास अचूकपणे ओळखता येत नाही हे सांगूनही खरे वाटणार नाही.

मार्च 14 तारीख π दिवस म्हणून साजरा केला जातो. कारण या तारखेत 3, 14 या संख्या π च्या मूल्यातील संख्येशी जुळतात. π अप्रॉक्झिमेट डे म्हणून जुलै 22 तारीख साजरा केला जातो. कारण हा दिवस 22/7 अपूर्णांक सुचवतो.

अशी आहे ही π ची सुरस कथा!

●●●

ऑयलर संख्या e ची अद्भुत कहाणी!

गणित जगतात π, e, i, 0 आणि 1 याबद्दल जितकी चर्चा होत असेल तितकी इतर कुठल्याही अंकाच्या वा संख्येच्याबद्दल होत नसावी. π इतकी नसली तरी ऑयलर संख्या eचा सुद्धा गणिताच्या इतिहासात फार मोठा वाटा आहे. π च्या इतिहासाइतका e चा इतिहास मनोरंजक नसेलही. परंतु गणित जगतात त्यालाही मानाचे स्थान आहे. तुलनेने e ही संकल्पना अलिकडची असल्यामुळे इतिहासाची पानं कदाचित भरलेली नसतील.

गणितात e चा उल्लेख अनेक ठिकाणी होत आहे. 1618 साली जॉन नेपियर (John Napier, 1550-1617) या स्कॉटिश शास्त्रज्ञाने लॉगरिदम तक्त्यांचा (Logarithm Tables) शोध लावला. सतराव्या शतकाच्या सुरुवातीच्या काळात युरोपमध्ये सागरी वाहतूक व नौकानयनाला अतिशय महत्व प्राप्त झाले होते. अथांग महासागराच्या मध्यावर बोटीत असताना आपण नेमके कुठे आहोत, आपल्याला कुठल्या दिशेने जायला हवे, वादळी हवामानामुळे जहाज हेलकावे खात असल्यास ते मूळपदावर आले की नाही याची खातरजमा अशा अनेक गोष्टींचा सामना जहाजाच्या कप्तानाला करावा लागत होता. त्यामुळे खगोल शास्त्रज्ञांना भरपूर मागणी होती. आकाश निरीक्षणातून अक्षांश-रेखांशांचा अंदाज बांधण्यासाठी मोठ्या प्रमाणात आकडेमोड - तेही काही क्षणाच्या अवधीत आणि अचूकपणे – करावे लागत असे. लांबच्या लांब आकडे असलेल्या संख्यांचे गुणाकार-भागाकार करावे लागत असे. त्या तुलनेने बेरीज वजाबाकी सोपे वाटत होते. नेपियरच्या लॉग व अँटिलॉग टेबल्समुळे कंटाळवाण्या गुणाकारा-भागाकाराऐवजी सुटसुटीत असलेल्या बेरीज-वजाबाकीतून आकडेमोड करणे शक्य झाले.

Logarithm याचा अर्थ गुणोत्तर संख्या असा होतो. निर्दिष्ट ठिकाणाचे अक्षांश-रेखांश शोधण्यासाठी गोलीय त्रिकोनमितीतील (spherical Trigonometry) सात सात आकडी संख्याचा वापर होत असे. म्हणूनच नेपियरच्या NapLog (x) = $-10^7 \log (x/10^7)$ या समीकरणात 7 असा उल्लेख आहे. नेपियरचे हे टेबल्स नॅच्युरल लॉग म्हणून ओळखले जातात. कारण या लॉगच्या हिशोबासाठी आधारांक (Base) म्हणून e चे मूल्य वापरलेले होते. परंतु हेन्री ब्रिग्स (Henri Briggs,1561-1631) या नेपियरच्या समकालीन गणितज्ञानी आधारांक e ऐवजी 10 वापरल्यामुळे होणाऱ्या फायद्यांची यादीच त्यानी दिली व त्याप्रमाणे एक तक्ताही करून पाठविला. काही महिन्यानी प्रसिद्ध झालेल्या नेपियरच्या पुस्तकात ब्रिग्सच्या टेबलला परिशिष्टात स्थान मिळाले.

गंमत म्हणजे लॉग टेबलचा जनक म्हणून नेपियरला पूर्णपणे श्रेय द्यावे की नाही याबद्दल इतिहासकारात मतभेद आहेत. कारण याच सुमारास जूस्ट बर्गी (Joost Burgi) या स्विस वॉचमेकरने स्वतंत्ररित्या लॉग टेबलची मांडणी केली होती. कॅल्क्युलसचा शोध न्यूटनने लावला की लेब्निट्झने, या वादासारखा हाही वाद गणित जगतात प्रसिद्ध आहे. ब्रिग्सच्या लॉगच्या तक्त्याचा आधारांक 10 होता व त्यासाठीच्या समीकरणात e असूनसुद्धा e चा उल्लेख त्यानी टाळला होता. 1647मध्ये सेंट व्हिन्सेंट या गणितज्ञाने काटकोनी अपास्त (Rectangular Hyperbola) चे क्षेत्रफळ काढताना e च्या मूल्याचा वापर नक्कीच केला असेल. परंतु त्याच्याही लेखनात e चा उल्लेख नव्हता. परंतु हायपरबोलाचे क्षेत्रफळ काढणाऱ्या ख्रिश्चियन हॉयगन्सला (की ह्युजेन्स?) (Christian Huygens, 1629-1695) मात्र e आणि लॉग यांच्यात परस्पर संबंध आहे हे लक्षात आलेले होते. त्या कालखंडातील अनेक गणितज्ञ कळत न कळत e चा वापर करत होते. परंतु त्याचे नीटसे आकलन त्यांना होत नव्हते.

1661 साली हॉयगन्स यानी अजून एका वक्ररेषेची मांडणी करताना $y = ka^x$ या समीकरणाचा वापर केला होता. यातही लॉगचा आधारांक 10 आणि संख्या e होती. हॉयगन्स यानी या समीकरणाचा वापर करून eच्या मूल्यातील 17 दशांश स्थळं शोधून काढल्या होत्या. याच्याही या कर्तृत्वाला प्रतिसाद मिळाला नाही आणि e पुन्हा एकदा अज्ञातच राहिले.

1668मध्ये डच गणितज्ञ, निकोलस मेर्काटेर (Nicolous Mercater, 1620-1687) यानी log (1+x) याचे विस्तारित श्रेढीमध्ये मांडणी केली. येथे e आधारांक असलेल्या नॅच्युरल लॉगचा वापर केला होता. परंतु यावेळीसुद्धा कुणालाही e चे कौतुक करावेसे वाटले नाही.

गणिताच्या जगात दुय्यम स्थानावर असलेला हा e आर्थिक व्यवहारातील चक्रवाढीच्या संदर्भातील आकडेमोडीत मात्र आघाडीवर होता. चक्रवाढीच्या हिशोबात e ला पर्याय नाही हे 1683मध्ये जॅकोब बेर्नोली यांनी प्रथम ओळखले. त्याला limit $(1+1/n)^n$ यात n, इन्फिनिटी (∞) पर्यंत गेल्यास काय होईल याबद्दल कुतूहल होते. बायनॉमियल सिद्धांत वापरून limit काढत असताना याचे मूल्य 2 व 3 च्या मध्ये कुठेतरी असणार हे त्याच्या लक्षात आले. गंमत म्हणजे त्याला मिळालेले उत्तर आणि यापूर्वी लॉगमध्ये वापरलेला आधारांक यांचा काहीतरी परस्पर संबंध असू शकतो हे त्याच्या लक्षात आले नाही. परंतु या eने चक्रवाढ व्याजाच्या मर्यादा अधोरेखीत केले.

गणिताच्या सोईसाठी एखादी कंपनी 100 टक्के व्याज देते असे समजू या. या कंपनीत 1 रू मुद्दल म्हणून गुंतविल्यास व वर्षाच्या शेवटी व्याजाचा हिशोब करत असल्यास आपल्याला वर्षानंतर मिळणारी रक्कम दुप्पट होऊन आपल्या हातात दोन रु पडतील. दर सहा महिन्यानी व्याजाचा हिशोब होत असल्यास वर्षाच्या शेवटी 1.50+0.75 = 2.25 रु मिळतील. 6 महिन्याच्या ऐवजी दर 3 महिन्यानी हिशोब होत असल्यास बॅंकेतील आपली ठेव 2.44 रु एवढे वाढेल.

जर वर्षभरात n वेळा व्याजाचा हिशोब होत असल्यास आपल्याला मिळणारा परतावा $A=P(1+r/n)^n$ (यात A परतावा, P मूळ मुद्दल, r वार्षिक व्याज दर आणि n व्याजाच्या हिशोबाची कालावधी) या समीकरणातून काढता येईल. दर आठवड्यानी व्याज जमा होत असल्यास सरळ व्याजापेक्षा नक्कीच जास्त पैसे मिळतील. परंतु यानंतर मात्र काही पैशांचाच फरक होत असल्यामुळे त्या हिशोबाला काही अर्थ नाही. परंतु आपली गुंतवणूक कोटीच्या घरातली असल्यास 6-7 आकडी संख्येतही मोठ्या प्रमाणात वाढ होईल.

गंमत म्हणून व्याजाच्या हिशोबाची कालावधी प्रती ताशी, वा प्रती मिनिट वा प्रती सेकंद असे न काढता प्रत्येक क्षणाची कालावधीने हिशोब केल्यास जमा रकम
2.718281828459045235360287471352662497757247093699957496696762724076630353547594571382178525166427.... या संख्येतील दशांशाचे आकडे अनंतापर्यंत जात आहेत. या संख्येला कुठल्याही गुणोत्तरच्या स्वरूपात मांडता येत नसल्यामुळे याला 'बीजातीत संख्या' (Transcendental Number) असे म्हटले जाते. सर्व बीजातीत संख्या अपरिमेय असतात परंतु सर्व अपरिमेय संख्या बीजातीत नसतात. (All transcendental numbers are irrational, but not all irrational numbers are transcendental. (Transcendental numbers are a subset of irrational numbers).)आणि याचेच e असे नामकरण झाले

2.71828... या संख्येला e म्हणून संबोधण्याचे अजून एक कारण म्हणजे याचा संबंध घातांकीय वृद्धीशी (exponential growth) जोडता येईल. चक्रवाढ व्याजाप्रमाणे घातांकीय वृद्धीचे अजून एक उदाहरण म्हणजे इलेक्ट्रॉनिक तंत्रज्ञानातील मूरचा नियम (Moor's Law)असू शकेल. 1965 मध्ये हा नियम अस्तित्वात आला. 1971 ते 2015 पर्यंत 2^{20} या हिशोबाने

ट्रान्झिस्टरच्या क्षमतेत वाढ व आकारमान कमी कमी होत गेले. 1सेंमी x 1सेंमीच्या एवढ्याशा चिपवर 10 लाख ट्रान्झिस्टरची रचना करणे शक्य झाले. मायक्रोप्रोसेसर्सच्या क्षमता 70च्या दशकाच्या तंत्रज्ञानाच्या तुलनेत अनेक पटीने वाढलेल्या आहेत.

संभाव्यतेसंबंधीचे आडाखे बांधत असताना संख्याशास्त्रज्ञसुद्धा eच्या मूल्याबद्दल जागरूक असतात. झाडांच्या फांद्यावर कोळीष्टक विणाऱ्या कोळीच्या धाग्याची रचनासुद्धा e शी संबंधित आहे. स्वतःच्या वजनाने जर चेन लोंबकळत असल्यास त्यातून तयार होणाऱ्या वक्ररेषेच्या आकाराच्या समीकरणात

$$y=a/2(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

e ला महत्वाचे स्थान दिलेले आहे. (हा आकार कॅटेनरी वक्ररेषा म्हणून ओळखला जातो.) 0 ते 1 दरम्यान असलेल्या यदृच्छ संख्यांच्या (random number) शोधासाठी संगणकाला e वर अवलंबून रहावे लागते.

गूगलच्या कार्पोरेट ऑफिसलासुद्धा या e ने अक्षरशः वेड लावले होते. काही संगणक तज्ञांची भरती त्यांना करायची होती. त्यांच्या ऑफीससाठी गणित व संगणक शास्त्रातील विशेषज्ञांची मागणी होती. परंतु त्यांना कुठल्या निकषांवर बोलवावे याचा नीटसा अंदाज येत नव्हता. व ते खरोखरच पारंगत आहेत का याचा अंदाज त्यांना घ्यावयाचा होता. त्यासाठी त्यांनी एक नामी युक्ती शोधून काढली.

अमेरिकेतील मोठमोठ्या शहरात{first 10-digit prime find in consecutive digits of e}.com या नावाचे मोठमोठे पोस्टर्स लावले होते व या संस्थळावर जाऊन माहिती गोळा करण्याचा सल्ला दिला होता. परंतु या संस्थळापर्यंत पोचण्यासाठी पहिल्यांदा e संख्येतील दशांश स्थळाच्या बाजूतील 10 अंकाची अविभाज्य संख्या (prime number) शोधावे

लागणार होते. त्यानंतरच इतर माहिती मिळू शकली असती. जे तज्ञ होते त्यांनी जावामध्ये एक छोटासा प्रोग्राम लिहून अविभाज्य संख्या शोधून काढले व संस्थळाला भेट दिली. e च्या दशांश स्थळातील 99व्या अंकापासूनचे पुढील 10 आकडे असलेली ही 7427466391 संख्या अविभाज्य आहे. गूगलला भरतीच्या या नवीन पद्धतीतून अनेक विशेषज्ञ मिळाले. गूगलला 2004 साली भाग भांडवल वाढवायचे होते. त्यासाठी त्यांनी e चे पहिले 10 आकडे असलेल्या संख्येच्या – 2718281828 - एवढे भांडवल विक्रीचे उद्दिष्ट ठेवले होते. व विक्री पूर्ण झाली.

π प्रमाणे e चे आकडेसुद्धा तोंडपाठ म्हणून दाखविण्याचे खूळसुद्धा अजूनही टिकून आहे व याविषयी नवीन नवीन दाखले स्थापण्यासाठी चढाओढ असते. 2004 मध्ये जर्मनी येथील अँड्रियास लिएटझो (Andrias Lietzow) यानी हातात पाच चेंडू झेलत झेलतच 316 आकडे म्हणून दाखविले. 25 नोव्हेंबर 2007 रोजी भास्कर करमरकर या भारतीयाने 1 तास 29 मिनिटे व 52 सेकंदात 5002 आकडे सांगत नवा विक्रम प्रस्थापित केला. त्याच दिवशी हेच आकडे उलटे म्हणत अजून एका विक्रमाची नोंद केली. e संबंधी अशा अनेक अफवा अधून मधून ऐकू येतात.

आपल्याला e चे अशा प्रकारे आकडे लक्षात ठेवायचे असल्यास खालील वाक्य तोंडपाठ असले तरी पुरेसे ठरेलः

I’m forming a mnemonic to remember a function in analysis.

यातील प्रत्येक शब्दातील अक्षरांच्या संख्येवरून e संख्या लक्षात ठेवता येईल. (2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8)

या अपरिमेय संख्याचे नामकरण कसे झाले असेल याबद्दलही अनेक तर्क वितर्क लढविले जातात. ऑयलरचे स्वतःच्या नावातील आद्याक्षरावरून हे

नाव दिले असे एक सार्वत्रिक मत आहे. हे तितकेसे खरे वाटत नाही. कारण a, b, c, d प्रमाणे हेही एक गणितीय चिन्ह म्हणून त्यानी वापरले असण्याची शक्यता आहे. e हे एक्स्पोनन्शियल (exponential) चे आद्याक्षर असल्यामुळे त्याचा वापर झाला असावा. परंतु तेसुद्धा खरे नाही. एवढे मात्र खरे की 1631 साली ऑयलर यांनी गोल्डबाख या त्याच्या मित्राला लिहिलेल्या पत्रात e नावाने या संख्येचा उल्लेख केला होता. 1748 साली प्रकाशित झालेल्या गणितीय ग्रंथात e संबंधी मोठ्या प्रमाणात बरेच काही लिहिलेले सापडते.

e = 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!..... आणि limit $(1+1/n)^n$, n ते ∞ होत गेल्यास त्याचे उत्तर e असणार हे ऑयलरने या ग्रंथात सिद्ध करून दाखवले होते. ऑयलरने आकडेमोड करून e च्या दशांश स्थळातील 18 आकडे शोधून काढले होते. परंतु हे आकडे कसे आले याचा उल्लेख मात्र पुस्तकात नाही! परंपरित अपूर्णांक (Continued fraction) वापरून सुद्धा e चे मूल्य निर्धारित करता येते हेही ऑयलरने शोधून काढले.

हातात कॅल्क्युलेटरसारखे साधन नसतानासुद्धा π चे आकडे शोधणाऱ्या शॉंक्स याने eचे 137 आकडे व नंतर 205 आकडे शोधले होते, हे सांगूनही खरे वाटणार नाही. e मधील 200 आकडे शोधण्यासाठी e = 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!..... या समीकरणाचे 120 टर्म्स पर्यंत जावे लागेल. आता गूगलवर क्लिक केल्यास e चे 10000 आकडे सापडतील. नासाच्या संस्थळावर e चे दहा लाख आकडे सापडतील.

e, i, π, 1, आणि 0 यांचे एकमेकाशी असलेले नाते

लिओनार्ड ऑयलरचा गणित जगाला दिलेल्या देणगीत π, e, i, 0 आणि 1 यांचा एकमेकाशी संबंधित असलेल्या समीकरणाच्या शोधाला प्रथम क्रमांक

द्यावे लागेल. या पाचही संख्यांची एकजूट करत $e^{i\pi}+1=0$ समीकरणात बसवून त्यानी आपल्या अगाध गणितीय ज्ञानाचे प्रदर्शन केले होते.

टेलरश्रेढीच्या अनुसार

$e^x=1+x/1!+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!+.....$ येथे x चे मूल्य काहीही असू शकेल.

जर x ऐवजी π वापरल्यास

$e^{\pi}=1+\pi/1! + \pi^2/2! + \pi^3/3! + \pi^4/4! +.....$

असे हे समीकरण दिसेल. $i^2= -1$ मधील i वापरून x ऐवजी ix असे हे समीकरण लिहिल्यास

$e^{ix}=1+ix/1!+(ix)^2/2!+(ix)^3/3!+(ix)^4/4!+.....$

ते असे दिसेल. परंतु $i^2= -1$ असल्यामुळे या समिकरणाची पुनर्मांडणी असेही करता येईलः

$e^{ix} = \{1-x^2/2! + x^4/4! – x^6/6!.....\} + i\{x/1!-x^3/3!+x^5/5!-.....\}$

टेलर श्रेढीच्या अजून एका विधानानुसार

$sinx=\{x/1!-x^3/3!+x^5/5!- x^7/7!.....\}$ व

$cosx=\{1-x^2/2! + x^4/4! – x^6/6!.....\}$

त्यामुळे $e^{ix} = cosx + i\ sinx$ होईल.

परंतु ऑयलरच्या समीकरणात x ऐवजी π लिहिल्यास

$e^{i\pi} = cos\pi + i\ sin\pi$ मुळातच π कोननिर्धारिक असून $2\pi = 360^0$ आहे. त्यामुळे

$sin\pi = 0$ व $cos\pi = -1$ होत असल्यामुळे

$e^{i\pi} = 0 -1$ असे होईल. किंवा

$e^{i\pi} + 1= 0$

शेक्सपियरच्या नाटकातील वा त्यांनी लिहिलेल्या सॉनेटमध्ये वर्णन केलेल्या प्रेम या शब्दात जो अचूकपणा व बंदिस्तपणा आहे तसाच बंदिस्तपणा ऑयलरच्या या समीकरणात आहे हे वाचकांच्या नक्कीच लक्षात येईल.

अशी आहे ही e ची अद्भुत कहाणी!

●●●

अविभाज्य संख्या: न संपणारा शोध



फेडेक्स या अमेरिकन कंपनीमध्ये जॉन पेस फायनान्स मॅनेजर म्हणून काम करत होता. परंतु जमा-खर्चाच्या आकडेवारी व एक्सेल शीट्समधील रकानेच्या रकाने भरण्यापेक्षा आतापर्यंत ज्ञात असलेल्या अविभाज्य संख्येपेक्षा अजून एक यापेक्षा मोठी अविभाज्य संख्या शोधण्यामध्ये त्याला जास्त रुची होती. गेली 14 वर्ष तो अशा संख्याच्या मागे अक्षरशः जिवाचे रान करत होता. आतापर्यंत माहित असलेल्या अविभाज्य संख्येतील अंकापेक्षा आणखी जास्त अंक असलेली अविभाज्य संख्या त्याला शोधायचे होते. 26 डिसेंबर 2017 रोजी त्याचे हे उद्दिष्ट पूर्ण झाले. त्यानी शोधलेल्या अविभाज्य संख्येत हजार-

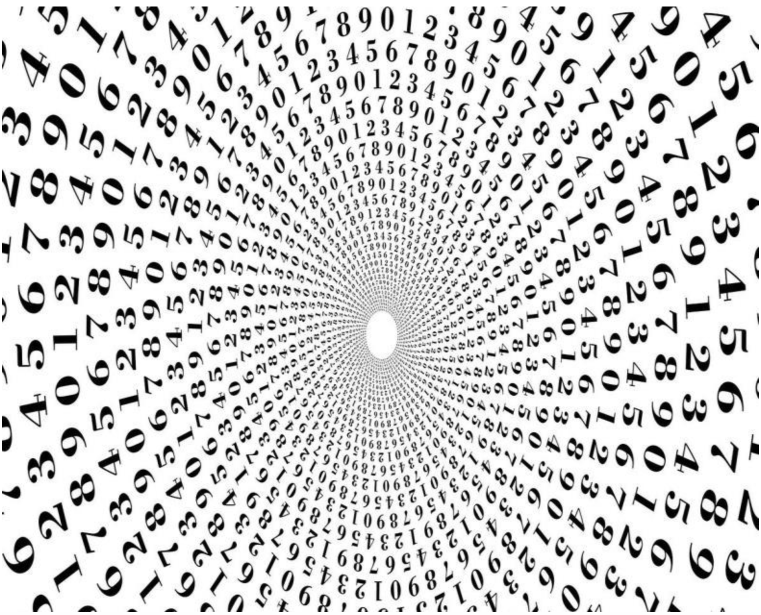
दोन हजार नव्हे तर तब्बल 2 कोटी 30 लाख अंक होते. ही संख्या प्रिंट करण्याचे ठरविल्यास व यातील आकडे दोन फाँट साइझमध्ये घेतले तरी एखादे मोठे पुस्तकच होईल.

सामान्यपणे धन पूर्णांकांना 'स्वाभाविक संख्या' म्हणतात. ज्या संख्येला 1 व ती स्वतः, यांखेरीज दुसऱ्या कोणत्याही संख्येने भाग जात नाही, तिला 'अविभाज्य संख्या' म्हणतात. उदा.,1 ते 20 पर्यंतच्या संख्येत 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 यांना अविभाज्य संख्या आणि 1 वगळता बाकीच्या 4, 6, 8, 9, 10, 12,14, 15, 16,18, 20 संख्यांना 'संयुक्त संख्या' म्हणतात. अविभाज्य संख्यांचे गुणक (वा अवयव) 1 व तीच संख्या असते. उदा 5 चे गुणक 1 व 5, 11 चे गुणक 1 व 11 19 चे गुणक 1 व 19 इ परंतु 4 ही संख्या 2 X 2 याप्रमाणेही मांडता येईल. 8 ही संख्या 2 X 2 X2 वा 9 ही संख्या 3 X 3, 10 ही संख्या 2 X 5 ..... या प्रमाणे मांडता येते. यावरून अविभाज्य नसलेल्या संख्यांचे गुणक नेहमीच अविभाज्य संख्या असतात असे म्हणता येईल.

इ.स.पू 300 च्या सुमारास युक्लिड या गणितीने एलिमेंट्स या 13 ग्रंथांच्या खंडामध्येसुद्धा अविभाज्य संख्यांचा उल्लेख केला आहे. ‘एकाहून मोठी प्रत्येक संख्या अविभाज्य संख्यांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात लिहिता येते’, या अंकगणितातील मूलभूत विधानाची सिद्धताही युक्लिडने दिली आहे. अविभाज्य संख्यांना अंत नाही, या विधानाच्या पुष्ट्यर्थ त्यानी केलेली सिद्धता हे तर्कशास्त्राच्या भाषेत लिहिलेले सुंदर काव्यच असल्याचे अनेक गणितज्ञांचे मत आहे. गणितावरील ही पुस्तकं आधुनिक विज्ञान व तर्कशास्त्र यांच्यापेक्षा श्रेष्ठ ठरतात. तेवीसशेहून अधिक वर्षे आपण या सिद्धता मूळ रूपात शिकत आहोत, यातच युक्लिडच्या सिद्धांतांचे माहात्म्य दिसून येते.

अविभाज्य संख्यांची निर्मिती करण्यासाठी अनेक हौशी व व्यावसायिक गणितज्ञ प्रयत्न करत होते/आहेत. अविभाज्य संख्या शोधण्यासाठी $2^n - 1$ हे

सूत्र गेली कित्येक वर्षे गणितज्ञ वापरतात. यात n ही एक स्वाभाविक संख्या आहे. गणितामध्ये मेर्सेने अविभाज्य संख्येचा फार ठिकाणी वापरला जातो. मरिन मेर्सेने या फ्रेंच गणितज्ञाने 17व्या शतकात अविभाज्य संख्यांचा अभ्यास करताना $Mn = 2^n - 1$ या सूत्राचा शोध लावला. (यात n ही एक स्वाभाविक संख्या आहे). सूत्रातून मिळालेल्या अविभाज्य संख्यांना मेर्सेने प्राइम असे म्हटले जाते. सुलभीकरणासाठी nच्या ऐवजी p व 2^p च्या ऐवजी 2p या संज्ञा वापरल्या जात आहेत. Mn = 2p − 1 या सूत्रात p साठी एखादी संख्या निर्दिष्ट करत सर्वात मोठ्या अविभाज्य संख्यांचा शोध घेतला जातो. या सूत्राप्रमाणे इतर काही महत्वाची सूत्रे खालील प्रमाणे आहेतः



1 विल्सनच्या सिद्धांतावर आधारलेले सूत्र (1770)
2 डायफोंटिनचे सूत्र (1976)
3 मिल्सचे सूत्र (1947)
4 राइटचे सूत्र (1938)
5. अविभाज्य संख्यांचे फल सूत्र
6 प्लौफचे सूत्र (2019)
याच्याही व्यतिरिक्त बहुपदी व आवर्तनाचा वापर करूनही अविभाज्य संख्याची निर्मिती करता येऊ शकते.

आपण या सूत्रांच्या फार खोलात न शिरता मोठ-मोठ्या अविभाज्य संख्याच्या निर्मितीसाठी गेल्या 30-40 वर्षात फार मोठा वेग आला आहे. तरीसुद्धा "निर्विवादपणे हीच सर्वात मोठी अविभाज्य संख्या व यानंतर अजून एकही अविभाज्य संख्या असणार नाही" असे युक्लिडच्या विधानाला आव्हान देऊ शकणारी सिद्धता गणितज्ञांच्या आवाक्यात आली नाही हेही तितकेच खरे.

एखाद्याने दावा केलेली संख्या खरोखरच अविभाज्य आहे की नाही याची पडताळणी करण्यासाठी काही चाचण्या व अल्गॉरिदम्स आहेत. एखादी विषम संख्या अविभाज्य संख्या आहे की नाही हे शोधण्यासाठी trial division, (या चाचणीत संख्येचे गुणक शोधून संख्येची अविभाज्यता ठरविली जाते.) Miller–Rabin primality test, (हे अल्गॉरिदम फेर्माच्या सिद्धांतावरून घेतलेले आहे.) AKS primality test, Lehmer primality test इत्यादी प्रकारच्या चाचण्यांचा वापर केला जातो.AKS primality test चाचणीचे जनक कानपुरच्या इंडियन इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नालॉजी येथील मनिंद्र अग्रवाल, नीरज कायल व नितिन सक्सेना हे संगणक वैज्ञानिक असून त्यांच्या या चाचणीला 2002 मध्ये मान्यता मिळाली. या पूर्वी 1919 मध्ये भारतीय

गणितज्ञ रामानुजन यानीसुद्धा अविभाज्य संख्या संबंधी काही गृहितकांचा उल्लेख केला होता. त्याच्या या प्रयत्नाला गणिती जगतात रामानुजन प्राइम म्हणून ओळखले जाते. एखादी संख्या अविभाज्य आहे की नाही हे या संस्थळावर शोधता येईल.. उदाः, मोबाइल क्रमांक, आधार क्रमांक, पॅन क्रमांक, डेबिट/क्रेडिट क्रमांक, जन्म तारीखासारख्या महत्वाच्या तारिखा इत्यादी संख्यामधून फेरफार केलेली (व 9 आकड्यापेक्षा कमी असलेली) विषम संख्या, अविभाज्य संख्या आहे की नाही याचा शोध घेण्याचा एक मजेदार खेळ खेळता येईल.

गणितीजगतात मेर्सेन प्राइमचा शोध घेणे हा एक छंद आहे. आजतागायत सापडलेल्या अविभाज्य संख्येपेक्षा अजून एका मोठ्या अविभाज्य संख्याचा शोध लावण्यासाठी हौशी अभ्यासक व गणितातील तज्ञमंडळी उत्सुक आहेत. एके काळी अशा अविभाज्य संख्येच्या शोधासाठी कागद-पेन्सिल वापरून आकडेमोड याला पर्याय नव्हता. संवाद सुविधाही बेताच्या होत्या. त्यामुळे एखाद्याने त्याच्या दृष्टिकोनातून मोठी अविभाज्य संख्या शोधली तरीही गणितीजगतात सर्वापर्यंत पोचण्यासाठी बराच काळ जात असे. यासाठी 20व्या शतकात संगणकांचा वापर करण्यात आला. परंतु त्या काळातील संगणकांतील प्रोसेसर व मेमरी यांच्या मर्यादित क्षमतेमुळे यासंबंधात फार मोठे यश मिळू शकले नाही. एकविसाव्या शतकात मात्र प्रगत संगणक तंत्रज्ञानामुळे याविषयी फार मोठी प्रगती झालेली आहे.

1996मध्ये जॉर्ज वोल्टमन या संगणक तज्ञाने जगातील सर्वात मोठ्या अविभाज्य संख्यांच्या शोधाला उत्तेजन देण्यासाठी Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) या कंपनीची स्थापना केली. अविभाज्य संख्यांच्या संबंधीच्या प्रकल्पांना सर्व प्रकारे मदत करणारी कदाचित ही एकमेव संस्था असेल. जॉर्ज वोल्टमन यानी अविभाज्य

संख्यासंबंधी Prime95 व MPrime असे संगणक प्रणाली लिहिलेली आहेत. स्कॉट कुरोस्की या संगणक तज्ञाच्या the PrimeNet व Internet server या प्रणालीच्या मदतीने जॉर्ज वोल्टमन यानी लहान-मोठ्या वेग-वेगळ्या प्रकारच्या संगणकांतील नंबर क्रंचिंगसाठी संगणक प्रणाली लिहून अविभाज्य संख्यांच्या संशोधकांना एक प्रगत सुविधा उपलब्ध करून दिली आहे.

खरे पाहता आजतागायत सापडलेल्या मोठ्या अविभाज्य संख्येपेक्षा अजून एका मोठ्या अविभाज्य संख्येचा शोध म्हणजे एका प्रकारे गवताच्या मोठ्या राशीत सुई शोधल्यासारखे आहे. तरीसुद्धा जागतिक दाखला स्थापित करण्यासाठी, गणिताच्या इतिहासात आपले नाव नमूद होण्यासाठी व इतर अन्य कारणाबरोबर संशोधनाचा थरार अनुभवण्यासाठी हजारो जण या संस्थेचे सदस्यत्व घेत आहेत. गणित जगतात एक नवीन इतिहास घडविण्याची या संशोधकांची महत्वाकांक्षा आहे. या संस्थेच्या अधिकृत सदस्यांना संस्थेच्या संगणक प्रणालींना विनामूल्य वापरण्यास अनुमती आहे. या संशोधनाच्या थराराबरोबरच ही संस्था आजतागायत माहित असलेल्या अविभाज्य संख्येपेक्षा अजून एक यापेक्षा मोठी अविभाज्य संख्या शोधणाऱ्यांना 3000 डॉलर्सचे बक्षीसही देत आहे. इलेक्ट्रॉनिक फ्रंटियर फौंडेशन या अजून एका संस्थेने 10 कोटी (100 मिलियन) अंक असलेल्या मेर्सेन अविभाज्य संख्याच्या संशोधकाला 150000 डॉलर्सचे बक्षीस देणार आहे.

युक्लिडच्या काळापासून आतापर्यंत शोध लावलेल्या मोठ - मोठ्या अविभाज्य संख्यांचा या तक्त्यात उल्लेख आहे. जॉन पेसने 26 डिसेंबर 2017 रोजी लावलेल्या शोधाचा क्रमांक 50वा आहे. या तक्त्यातील सर्व संख्यांची किमान एकदा तरी त्यांच्या विभाज्यतेची खात्री करून घेतलेली आहे. जाहीर

केलेल्या या मोठ-मोठ्या अविभाज्य संख्यांच्या अधेमधे अजूनही एखादे अविभाज्य संख्या असण्याची शक्यता नाकारता येत नाही.

7 डिसेंबर 2018 रोजी पॅट्रिक लारोश यानी 51व्या क्रमांकावरील आजमितीपर्यंत लावलेली सर्वात मोठी अविभाज्य संख्या आहे. त्यातील Mn (= 2p – 1) या सूत्राप्रमाणे p चे मूल्य 82589933 आहे. या अविभाज्य संख्येत 24,862,048 अंक आहेत. या संख्येची टेक्स्ट फाइल 25 Mb एवढी भरू शकेल. (सामान्यपणे पुस्तकाची टेक्स्ट फाइल 1-2 Mb असते.) एका ओळीत 75 आकडे व एका पानात 50 ओळी असे या संख्येतील अंक प्रिंट केल्यास 6629 पानं लागतील. पानाच्या एकाच बाजूला संगणकाच्या प्रिंटरवर प्रिंट केल्यास 14 रीम पेपर लागतील.

2016 साली शोधलेल्या मोठ्या अविभाज्य संख्यांच्या संबंधातील हा व्हिडीओ याविषयी भरपूर काही सांगत आहे.

आपणही या प्रकल्पात भाग घेऊ शकता. आणि आपण शोधलेल्या अविभाज्य संख्येत 10 कोटी (100 मिलियन) अंक असल्यास इलेक्ट्रॉनिक फ्रंटियर फौंडेशन संस्थेच्या 150000 डॉलर्सच्या बक्षीसावर दावाही करू शकता!

●●●

गणितीय बुद्धीमत्ता व चारित्र्य गुणांक (MICQ)

डॉ. भास्कर आचार्यांबरोबरच्या गप्पा... गणिताच्या!

कदाचित उपशीर्षक वाचून आश्चर्य वाटले असेल. कोण हा डॉ. भास्कर आचार्य? त्याच्या गप्पातून काय मिळणार? याचा आपल्याशी काय संबंध? मुळात हा कुठल्या विद्यापीठाचा? स्टॅनफोर्ड, ऑक्सफर्ड, हार्वर्डचा की कुठल्यातरी गावठाणातला? त्याच्या नावावर किती पेटंट्स आहेत? खरोखरच तो स्कॉलर आहे का? गूगलवर – लिंकडेनवर त्याच्याबद्दल काय माहिती दिली आहे? ... असे अनेक प्रश्न आपल्याला सुचतील. जरा दमानं घ्या. सगळ सांगतो.

गणिताची थोडी फार माहित असलेल्यांना डॉ. भास्कर आचार्य या नावाशी साधर्म्य असलेले भास्कराचार्य काही नवीन नाहीत. बाराव्या शतकातील भारतीय गणितज्ञ. स्वत:च्या अविवाहीत मुलीचे मन रिझविण्यासाठी लीलावती या ग्रंथाचे ग्रंथकर्ते. गणितातील कूटप्रश्नाबद्दल लिहिणारे. हेच भास्कराचार्य आता डॉ. भास्कर आचार्य म्हणून वावरत आहेत.

हे कसे शक्य आहे? 21 व्या शतकात त्यांचे येथे काय काम?

काही वैद्यकीय चमत्कारामुळे 12 व्या शतकातील भास्कराचार्य पृथ्वीवरील मृत्युनंतर माणूससदृश वस्ती असलेल्या अंतराळातील गुरुग्रहाच्या टायटन या उपग्रहावर सदेह पोचले. (सदेह वैकुंठगमन आपल्याला नवीन नाही!) टायटनवर पोचल्यानंतर तेथेही त्यानी आपले चांगले बस्तान बसविले व काही चमत्कारिक आयुर्वेद औषधांच्या सेवनामुळे त्यांना चिरआरोग्य व अमरत्व प्राप्त झाले. पाला पाचोळा व जडीबुटीपासून बनविलेल्या काही टॉनिकच्या सेवनामुळे त्यांची बुद्धी तीक्ष्ण राहिली. गंमत म्हणजे टायटन उपग्रहातील 'माणसं' पृथ्वीवासीयांच्या तुलनेने फारच बुद्धीमान होते.

उदाहरणच द्यायचे असल्यास तेथील अती सामान्य 'माणसा'चे बुद्ध्यांकसुद्धा 200 च्या पेक्षा जास्त आहे.

आपल्याला जसे परग्रहातील बुद्धीमान प्राण्याविषयी कुतूहल आहे तसेच तेथील माणसांनासुद्धा अंतराळातील इतर सजीवाबद्दल उत्सुकता होती. त्यांच्या प्रगत संस्कृतीने विज्ञान – तंत्रज्ञानातील अत्याधुनिक संशोधनातून पृथ्वीवर सजीवसृष्टी आहे हे केव्हाच ओळखले होते. पृथ्वीवर अनेक वेळा ते येऊनही गेले आहेत. एका विशिष्ट टेलिपोर्टेशन तंत्रामुळे हे त्यांना सहज शक्य झाले. टेलिपोर्टेशन तंत्रातील काही विशेष गुणधर्मामुळे पृथ्वीवर आल्यानंतर ते परग्रहातील रहिवाशी असावेत याचा किंचितही कुणालाही संशय न येण्याइतपत ते बेमालूमपणे आपल्यात मिसळून गेले व येथे असताना पृथ्वीवरील जीवनपद्धती त्यांनी आत्मसात केली. परंतु या पृथ्वीवर फार दिवस राहण्याचा त्यांना कंटाळा येत होता. परत आपल्या ग्रहावर पोचण्याची घाई करत होते. कारण त्यांच्या दृष्टीने पृथ्वीवरील माणसं अकलेने फार कमी होते. डॉ. भास्कर आचार्य मात्र याला अपवाद ठरले. काही कागदपत्रांची पूर्तता करून ते पृथ्वीवर प्राध्यापक म्हणून वावरत होते. त्यांचा पृथ्वीवरील वेळ मजेत जात होता. नवीन गोष्टी समजून घेण्यात त्यांना रुची होती. त्यामुळे ते विद्यापीठांच्या सेमिनार्समध्ये न चुकता हजर राहत होते.

अशाच एका गणित विषयाशी संबंधित परिषदेत त्यांची भेट झाली. परिचय वाढला. त्यांचा पूर्व इतिहास समजला. परिचयाचे मैत्रीत रूपांतर झाले. अनेक वेळा ते भेटतही गेले. गप्पा रंगू लागल्या. मनमोकळेपणाने ते बोलू लागले. माझ्यासारख्या निरुपद्रवी माणसापासून धोका नाही याची खात्री झाल्यानंतर ते आपणहून त्यांच्या जगाच्या गोष्टी सांगू लागले. आपल्या या जगाच्या गुणदोषावर बोट ठेऊ लागले. त्यांच्या टीकेत थोडासाही किल्मिष नव्हता हे विशेष. त्या गप्पा कशा प्रकारच्या होत्या, त्यातील डॉक्टरांची मार्मिक टिप्पणी

कशी होती याबद्दलची ही एक लेखमालिका आहे. कदाचित कंटाळवाणा वाटेल. परंतु एका एलियनच्या नजरेतून आपण काय आहोत हे समजून घेणे मनोरंजक ठरेल.

त्या दिवशीच्या गप्पांच्या ओघात डॉक्टरांना पृथ्वीवरील बुद्धीमत्ता मोजण्याची तऱ्हा पसंत नाही हे कळले. त्यांच्या मते बुद्ध्यांक हे बुद्धीमत्तेचे मापक होऊ शकत नाही. कारण त्यात व्यक्तीच्या चारित्र्याला, त्याच्या सचोटीला स्थान नाही. थोडेसे खोदून विचारल्यानंतर बुद्ध्यांकाऐवजी गणितीय बुद्धीमत्ता व चारित्र्य गुणांक (Mathematical Intelligence and Character Quotient – MICQ) हे प्रमाण मानले जावे अशी अपेक्षा त्यांनी व्यक्त केली. मुळात त्यांच्या जगातील एकूण एक सर्व व्यवहार गणितीय (व सांख्यिकी) पद्धतीने चालतात व त्यांच्यात गणितनिष्ठा उपजत असते. डॉक्टरांच्या मते पृथ्वीवरील माणसांची विभागणी दोन प्रकारात होऊ शकते; एक ब्राइट (BRITE -Benevolent, Resourceful, Intelligent, Talented Earthling) किंवा अन् ब्राइट (unBRITE). ब्राइट यांचा MICQ जास्त असतो व अन् ब्राइटचा फार कमी असतो. व या दोन्हीमधील मध्यरेषा म्हणून ज्यांचा MICQ, 50च्या जवळपास असेल त्यांच्याशी टायटनचे रहिवाशी संवाद साधू शकतील, असे त्यांना वाटत होते.

‘‘परंतु अन् ब्राइट्सची संख्या कशी काय कमी करता येईल?’ माझा प्रश्न.

यासाठी प्रथम गणितातील काही मूलभूत नियमांचे काटेकोरपणे पालन करावे लागेल. उदाहरणार्थ, कुठल्याही संख्येला शून्याने भागाकार करू नये, Infinity ही संख्या नाही हे लक्षात ठेवावे, तर्क व विचारांतीच कृती करावी, मेंदूला जड वाटत असेल तरच calculatorचा वापर करावा – ऊठसूट साधे, सुलभ आकडेमोडीसाठी नको, गणित सोडविताना इतर कुठल्याही गोष्टीपेक्षा रीतीकडे जास्त लक्ष असू द्यावे, इंजिनीयरिंग व संख्याशास्त्रासाठी गणिताचा

वापर करताना विशेष काळजी घ्यावी, इ.इ.... जर या गोष्टी लक्षात ठेऊन वागत असल्यास त्याचा MICQ 50च्या जवळपास आहे, असे म्हणावयास हरकत नसावी. त्याचबरोबर विनोदबुद्धी असणे अत्यंत गरजेचे आहे.

"तुमच्या दृष्टीने MICQ नेमके किती असू शकते, याची काही उदाहरणं...?"

या विधानावरून MICQ काढता येईल.

MICQ **विधान**

0 मानवी संवेदनांचा अभाव (अट्टल गुन्हेगार, मादक पदार्थांचे व्यसनी)

5 स्वार्थ प्रेरित वृत्ती (बेभानपणे वाहन चालविणारे,समाजविरोधी कृती करणारे)

10 टोकाचा हव्यास (सावकारी करणारे,घर सांभाळण्यासाठी शिकारी कुत्रे बाळगणारे)

15 दुराग्रह (विषमतेचे समर्थन करणारे,नालायक, असमर्थ)

20 सामान्यांना मूर्खात काढणे (कार्स, घर – जमीन यांच्याखरेदी – विक्रीचे दलाल, माध्यम/जाहिरात तज्ञ)

25 प्रेरणांचा अभाव (टीव्हीवरील जाहिरातदार,मुरलेले राजकारणी)

30 स्वत:च्या फायद्यासाठी विद्वत्तेचा वापर(राजकीय/सामाजिक नेते, तथाकथित शिक्षणतज्ञ)

35 सत्याचा अपार्थ करणे(फौजदारी वकील, भाषातज्ञ)

40 भव्य – दिव्य स्वप्न पाहणे (तथाकथित इंटेलेक्चुअल्स, संस्कृतीच्या नावे ऊर बडवून घेणारे, कला-संस्कृतीचे गंध नसणारे)

45 अमूर्त संकल्पना समजून घेण्याची कुवत नसणे (कामाच्या ठिकाणी पाट्या टाकणारे, इंजिनीयर्स, संख्यातज्ञ)

50 विनोदबुद्धी नसणे (सैन्याधिकारी, पोलीस अधिकारी,कर संकलन अधिकारी)

गणिताबद्दल अनादर दाखविणाऱ्यांच्या MICQ बद्दल अशा प्रकारे मांडणी करता येईल:

0 आयुष्यात गणिताला काही स्थान नाही व कुठलेही स्थान देता कामा नये

5 गणिताची रीत समजून न घेता व गणितीय नियम नवापरता एकमेकासारख्या दिसणाऱ्या संख्यांना रद्द करता येते.(64/16 = ~~6~~4/1~~6~~ =4)

10 गणिताचे नियम व सिद्धांत व्यक्ती स्वातंत्र्याला मारक ठरतात

15 आकार लहान असो वा मोठा, संख्या महत्वाची

20 गणितीय रीत व नियमामध्ये अग्रक्रमलावण्याची गरज नाही.

25 विचार व तर्क यांना उत्स्फूर्तता व मनमानी एके दिवशी मागे टाकतील.

30 एखादी गोष्ट अत्युत्तमपणे कार्य करत असलेतरी त्यात सुधारणा करण्यास वाव आहे

35 माणसापेक्षा यंत्र फारच चांगले

40 सामाजिक प्रगतीत गणिताचा नगण्य सहभाग आहे

45 गणिताची रीत वेळखाऊ व कष्टदायक असते

50 संख्यांचा अभ्यास म्हणजेच गणिताचा अभ्यास

"जर यातील 2 -3 गोष्टींचा उल्लंघन करत असल्यास MICQ त काय फरक पडू शकेल?"

कॉफीचा कप ढवळत "ज्या गोष्टीचा MICQ सर्वात कमी असेल तेवढेच त्याचे MICQ असेल."

“गणितातील प्रगतीसाठी काय काय करता येणे शक्य आहे?”

सहावीपासूनच तर्कशुद्ध विचार करण्याचे धडे द्यायला हवेत. शिक्षण व्यवस्था विद्यार्थी केंद्रित हवी. सहावीचे विद्यार्थी आपले लक्ष्य असावेत. तर्कशुद्ध विचार व त्यावरून निर्णय हे नेहमीच भोवतीच्या परिस्थितीवर अवलंबून असतात. तर्कशुद्ध विचार हा गणिताचा पाया आहे व ते एकमेकात गुंतलेले आहेत.

“परंतु गणितज्ञही तर्कविहीन निर्णय घेतच असतात की?”

त्यांना अपवाद म्हणून वगळावे लागेल. टायटन ग्रहावरील माणसांच्यात गणितीय ज्ञान उपजतच असते. कदाचित आमच्या येथील जनसामान्यांचा MICQ, 50 पेक्षा जास्त असावा. व बहुतेक जण गणिताच्या नियमांचे पालन करतात.

“जर कुणाचा तरी MICQ, 50 पेक्षा कमी असल्यास…..”

थोडेसे मागे पुढे पाहत व हळू आवाजात आमच्या येथे अशा लोकांसाठी दोन पर्याय आहेत; पहिल्यात एका ब्रेन वाशिंग मशीनमध्ये जाऊन मेंदूतील बिघडलेल्या पार्टसची दुरुस्ती करून घेऊन बाहेर येणे किंवा आमच्या ग्रहावरील तुरुंगात कायमचे राहणे. या तुरुंगातील कैद्यांना टीव्हीवर दिवसाचे 24 तास व आठवड्यातील साती दिवस पृथ्वीवर खेळलेल्या क्रिकेटचे मॅचेस दाखविले जातात. काही दिवसातच कैदी वैतागून, कंटाळून ब्रेन वाशिंग मशीनमध्ये जाण्याचा हट्ट धरतात.

“ MICQ बद्दल बोलताना विनोद बुद्धी हवी असे तुम्ही म्हणालात. मुळात गणितात कुठेही विनोद नाही. ते एक कोरडे शास्त्र आहे. विनोदाची का गरज आहे?”

विनोदबुद्धी तुमचे जीवन उजळून टाकते. गणित विषय शिकविताना याचा वापर केल्यास अमूर्त गोष्टी चटकन लक्षात राहतील व विषय सोपा होईल.

“तुमच्या ग्रहावरची माणसं हसू शकतात?”

आमच्यातही विनोदबुद्दी आहे. फक्त आमचे विनोद गणित व विज्ञान यांच्याशी संबंधित असल्यामुळे तुमच्या लोकांना त्या सपक वाटतील.

“एखादं उदाहरण….”

एक भौतशास्त्रज्ञ व गणितज्ञ कॉफी शॉपमध्ये कॉफी पीत बसले होते. तितक्यात कॉफी मशीनला आग लागली. धूर व ज्वाळा बाहेर येऊ लागल्या. भौतशास्त्रज्ञ उठला, कोपऱ्यातली रिकामी बादली उचलली, नळाखाली ठेऊन पाण्याने भरली, मशीन डिस्कनेक्ट करून बकेटमधील पाणी मशीनवर ओतून आग विझवली.

काही आठवड्यानंतर पुन्हा हे दोघे त्याच शॉपमध्ये बसले होते. पुन्हा मशीनला आग लागली. यावेळी गणितज्ञ उठला व रिकामी बकेट भौतशास्त्रज्ञाच्या हातात देत “मागील case वरून problem काय आहे व त्याचे उत्तर काय असेल याची मला पूर्ण कल्पना आहे. व त्यासाठी मी ही रीत सोपी करून देत आहे…. ” भौतशास्त्रज्ञ कपाळावर हात मारून घेत नळापाशी गेला….

“खरच. विनोदाची पातळी फारच उंचीची वाटते.”

मी पृथ्वीवरील अशाच प्रकारच्या विनोदांच्या चुटकुल्यांच्या शोधात आहे. याकामी तुम्ही मला मदत कराल का?

“हो. अवश्य. त्या मोबदल्यात मलाही काही हवं आहे.”

काय हवे?

“आमच्या पृथ्वीवरील विद्यार्थ्यांना शिकण्यासाठी काही कूटप्रश्न, कोडी द्यावीत.”

Done. मला या गप्पा आवडल्या. पुन्हा भेटू. असे म्हणत ते बाहेर पडले.

●●●

शिक्षणाचा बट्ट्याबोळ

डॉ. भास्कर आचार्याबरोबरच्या गप्पा... गणिताच्या!

डॉ. भास्कर आचार्य कॉफी शॉपच्या कोपऱ्यातील एका टेबलापाशी बसले होते. मला बघितल्यावर बसण्याचा इशारा करून माझ्याकडे त्यानी हळूच एक चिठ्ठी सरकवली.

“हे काय?”

तुमच्या विद्यार्थ्यांसाठी. तुमच्या विनोदी चुटकुल्यांच्या मोबदल्यात.....

मी चिठ्ठी वाचली. चिठ्ठीत दोन प्रश्न होते:

प्रश्न 1: एका पिशवीत 3 निळया रंगाच्या, 5 काळया रंगाच्या व 1 पांढऱ्या रंगाची अशा पायमोज्यांच्या जोड्या कोंबल्या आहेत. पिशवीच्या आत डोकावून न पाहता किमान किती पायमोज्या बाहेर काढल्यास एकाच रंगाची एक तरी जोडी मिळू शकेल?

प्रश्न 2 : अ, ब व क यांनी एका ओल्या पार्टीचा बेत आखला. प्रत्येकाने जमेल तेवढे बीअरच्या बाटल्या विकत आणायचे व बाटल्या फस्त झाल्यानंतर हिशोब करण्याचे ठरले. अ नी 5 बाटल्या व ब नी 3 बाटल्या आणल्या. परंतु क ला दुकानापाशी पोचण्यास उशीर झाल्यामुळे तो काहीही आणू शकला नाही. पार्टीची नशा ओसरल्यानंतर क कडून 240 रूपये वसूल करून अ व ब नी पैशाची वाटणी करून घेतली. बाटलीची किंमत समान असल्यास वाटणी कशाप्रकारे झाली असेल?

“ एकदम सोपे गणित आहेत. विद्यार्थी सहज सोडवतील.”

तुमच्या येथील शिक्षण पद्धतीवर तुमचा भलताच विश्वास दिसतो.

“त्यात काय चुकीचे आहे?”

मला नाही वाटत की तुमच्या शिक्षण पद्धतीमुळे मुलं सज्ञानी होतील व तुमचा उद्देश सफल होईल.

“थोडेसे स्पष्ट कराल का?”

माझ्या प्रश्नाला थेट उत्तर न देता या विषयाशी संबंधित 5 सप्टेंबरच्या शिक्षक दिन या दिवशी रेकॉर्ड केलेल्या एका शिक्षकाची लाइव्ह मुलाखतच त्यानी लॅपटॉप उघडून दाखवायला सुरुवात केली.

तुम्हाला शिक्षक व्हावे असे का वाटले?

लहान वयातील मुलांना सज्ञानी बनवावे, त्यांच्यातील उत्सुकतेला उत्तेजन द्यावे, हे माझे बालपणापासूनचे स्वप्न होते. अगदी लहान वयापासूनच त्यांची बुद्धीमत्ता वाढवण्यासाठी, त्यांना चारित्र्यवान बनविण्यासाठी प्रयत्न करणे गरजेचे आहे. व त्यासाठी शिक्षकी पेशाला दुसरा पर्याय नाही.

या शिक्षकी व्यवसायात आपण समाधानी आहात का?

जितके व्हायला हवे होते तितके समाधान मिळाले नाही. आपली सार्वजनिक शिक्षण व्यवस्था – व्यवस्था की अव्यवस्था, काहीही म्हणा – रशियातील कम्युनिस्ट राजवटीसारखी आहे असे मला वाटते. नोकरशाहीचा विळखा. वरून येणाऱ्या आदेशांचे तंतोतंत पालन करण्याची सक्ती. त्यात काही बदल वा सुधारणा करण्यास वाव नाही. नाविन्यतेला वाव नाही. या वयातच गुणवत्ता, कार्यक्षमता, क्रियाशीलता इत्यादींचे महत्व पटवून दिल्यास उद्याचे नागरिक म्हणून ते देशाची धुरा संभाळू शकतील. परंतु येथेच भोंगळ व्यवस्था असल्यामुळे पालक व इतरांकडून आम्हा शिक्षकांना नको नको त्या गोष्टी ऐकून घ्यावे लागतात. एक पालक म्हणूनही मी समाधानी नाही. सार्वजनिक शिक्षण व्यवस्थेतून बाहेर पडत असलेली पिढी खाजगी व्यवस्थेतील पिढीपेक्षा फारच गुणवत्ताविहीन व निकृष्ट दर्जाची आहे. जॉब मार्केटमध्ये ती तग धरू शकणार नाही.

तरीसुद्धा शिक्षक कसे काय टिकून राहतात?

सकारात्मक दृष्टी असलेले अनुभवी शिक्षक वाईटातूनच काही तरी चांगले शोधण्याच्या प्रयत्नात असतात. व व्यवस्थेला शरण जात आपला कार्यभाग संभाळून घेतात. अनुभव नसलेले गटांगळ्या खात काही तंत्र वापरून (काही वेळा चमचेगिरी करून) अस्तित्व टिकवून ठेवतात.

नवीन शैक्षणिक धोरणाविषयीचे आपले मत...

नववीपर्यंत परीक्षा नको म्हणून विद्यार्थ्यांना पुढच्या वर्गात ढकलताना नववीच्या परीक्षेत नापासांची संख्या वाढणार हे लक्षात घेतले जात नाही. काही तरी उलट सुलट धोरणं परस्पर ठरवून तथाकथित शिक्षण तज्ञ निवृत्त होऊन स्वत:च्याच धोरणावर शेरेबाजी करत टीव्हीवर मुलाखत देतात. परंतु यांच्या या धरसोड वृत्तीमुळे, चुकीच्या धोरणामुळे व अर्धवट अंमलबजावणी-मुळे पिढ्या बरबाद होत आहेत हेच कुणाच्याही लक्षात येत नाही.

तुम्ही शिक्षकीपेशा सोडण्याच्या विचारात आहात का?

अजून तरी नाही. परंतु कुठलेही उत्तेजन नसलेली, गुणवत्तेची कदर नसलेली ही किडलेली व्यवस्था कधीतरी मला पर्यायी विचार करण्यास भाग पाडणार हे मात्र नक्की. मीसुद्धा खाजगी शाळेत जायचा विचार करेन. कदाचित तेथील व्यवस्था एवढी वाईट नसेल.

वाईट शिक्षकांना नोकरीवरून कमी करणे शक्य आहे का?

‘ वाईट’ची व्याख्या कसे करणार यावर ते सर्वस्वी अवलंबून आहे. विद्यार्थ्याला ‘शिक्षा’ देताना तो अपंग झाला वा काही तरी विपरीत घडल्यास त्या शिक्षकाला नोकरीवरून काढून टाकण्याची शिफारस करता येईल. काही काळ पूर्ण पगारावर त्याचे निलंबन होईल. विचारणा चवकशी, इत्यादी सोपस्कार पूर्ण होईपर्यंत बराच काळ निघून जाईल. त्यामुळे इतर शिक्षक यातून काही ‘धडा’ शिकून सुधारतील याची शाश्वती नाही. वाईट शिक्षक म्हणजे

शिक्षकी पेशासाठी नालायक, शिकविण्याची क्षमता नसलेला वा विद्यार्थ्यांना परिक्षार्थी बनविणारा असे वाटत असल्यास त्याला कधीच नोकरीवरून काढले जाणार नाही.

शिक्षणव्यवस्थेत पैसा जास्त ओतल्यास सुधारणा होईल का?

हा एक चुकीचा समज आहे. शिक्षणातील भोंगळ कारभाराला, शिक्षकांचा अपुरा पगार वा वाईट शिक्षक जबाबदार नसून चुकीच्या गोष्टीवर भर देणाऱ्या व त्या हट्टापायी विद्यार्थ्यांचे नुकसान करणाऱ्या चांगले तज्ञच जबाबदार आहेत, हे माझे स्पष्ट मत आहे.

उदाहरणार्थ…..

शाळेत आलेला प्रत्येक विद्यार्थी डॉक्टर वा इंजिनीयर होत नसतो म्हणून विद्यार्थ्यांना किमान लिहिता वाचता आले तरी पुरेसे आहे या (कु)तर्कामुळे संपूर्ण व्यवस्था फक्त लिहिता वाचता येण्यासाठीच राबवली जात आहे. पाठ्यक्रमात, पाठ्यपुस्तकात किमान गोष्टीवरच भर दिला जात आहे. जास्तीत जास्त विषयावर कमीत कमी शिकविण्याकडे लक्ष केंद्रित केले जात आहे. त्यामुळे शेवटी शाळेतून बाहेर पडणाऱ्या विद्यार्थ्याला काहीही ज्ञान नसते. शालेय शिक्षणानंतर प्रत्येकाला प्रमाणपत्र दिले पाहिजे या हट्टापाय़ी कुठल्याही परिस्थितीत विद्यार्थ्याला नापास करायचे नाही असा अर्थ घेतला जात आहे. चुकीचे उत्तर बरोबर कसे यासाठी कसरत करणाऱ्या परीक्षकांची संख्या वाढत आहे. त्यामुळे शिक्षणाचे सुमारीकरण होत आहे.

एवढे होऊनसुद्धा आपला देश वैज्ञानिक, तंत्रज्ञ, यांचा देश म्हणून डांगोरा का पिटला जातो?

त्यासाठी येथे 80: 20 चा नियम लागू होतो. कुठलिही संस्था (कसेबसे) चालण्यासाठी तेथील फक्त 10 -20 टक्के लोक जबाबदार असतात. इतर 80 टक्के लोक निकृष्ट दर्जाचे असले तरी काही बिघडत नाही. त्यामुळे उपजतच

हुशार असलेले मोक्याच्या ठिकाणी असल्यास व्यवस्था चालू शकते. व्यवस्था अजूनही पूर्णपणे कोसळली नाही म्हणून हा देश महान म्हटला जात असावा. थोडेसे आत डोकावून पाहिल्यास वरच्या थराखाली सगळाच गाळ भरलेला दिसेल.

हे सर्व सुधारण्यासाठी काय करायला हवे?

शिक्षणाला भ्रष्ट राजकारण्यांपासून मुक्त करायला हवे. सब घोडे बारा टके ही मानसिकता जायला हवी. जे हुशार आहेत त्यांना उत्तेजन द्यायला हवे. ज्यांना जमत नाही त्यांना त्यांच्या योग्यतेचे शिक्षण मिळायला हवे. त्यांच्यासाठी काही पर्याय हवा. या देशाला वैज्ञानिक, डॉक्टर्स, तंत्रज्ञ, कलावंत यांच्या बरोबरच प्लंबर्स, टेलर्स, इलेक्ट्रिशियन्स, गवंडी, मेकॅनिक्स इत्यादींचीसुद्धा गरज आहे. त्यामुळे औद्योगिक प्रशिक्षण देणाऱ्या शिक्षणसंस्था मोठ्या प्रमाणात हव्यात. व त्यातून बाहेर पडणाऱ्यांना सन्मानाने वागवायला हवे. काहीच येत नाही म्हणून अशा धंद्यात पडणाऱ्याच्या संख्येत वाढ झाल्यामुळे निकृष्ट प्रतीचे काम होत आहे. मुळात खासगीकरणाचा ठेका बंद करून काही भरीव करण्यासाठी शासनाने पुढाकार घ्यायला हवे. तथाकथित शिक्षणतज्ञांना बाहेर हाकलून द्यावे....

डॉक्टरांनी लॅपटॉप बंद केला.

"फारच कठिण उपाय..."

जाऊ द्या हो. यात काहीही बदल होणार नाही, हेही तितकेच खरे.

नवीन विनोदी चुटके?

1. एका नवीन सिद्धांताचा प्रस्ताव आहे.

प्रस्ताव: ज्याला कमीत कमी ज्ञान आहे त्याला जास्तीत जास्त पैसा मिळतो.

प्रूफ :

ज्ञान म्हणजे शक्ती (Knowledge is power; knowledge = power) व

वेळ म्हणजे पैसा (Time is money; time = money)
सामान्यपणे वापरात असलेली ही गृहितकं आहेत.
भौतिकीतील नियमाप्रमाणे शक्ती = काम/ वेळ (power = work/time)
ज्ञान = शक्ती= काम/ वेळ = काम/ पैसा
(knowledge = power = work/time = work/money)
पैसा = काम/ ज्ञान (money = work/Knowledge)
यावरून ज्याच्याकडे ज्ञान कमी त्याप्रमाणात त्याच्याकडे पैसा जास्त असे सिद्ध करता येते.
प्रत्यक्ष व्यवहारातसुद्धा मोठ्या पदावरील जागांची भरती कमी ज्ञान असलेल्यांच्याकडे का होत असते हे कळू शकेल.
2. 180पेक्षा जास्त बुद्ध्यांक असलेल्या एका विद्वानाचा पृथ्वीतलावर मृत्यु होतो. नेहमीप्रमाणे पाप – पुण्याचा हिशोब ठेवणाऱ्या चित्रगुप्तासमोर त्याच्या आत्म्याला उभे केले जाते.
“नवीन फर्मानाप्रमाणे आम्ही, तुझी हरकत नसल्यास, तुला तुझ्यापेक्षा कमी बुद्ध्यांक असलेल्या आत्म्याबरोबर काही दिवसासाठी ठेवणार आहोत. कारण आम्ही फक्त शहाण्यानाच वाव देतो असा वृथा आरोप आमच्यावर केला जात आहे.
यातील एकाचा बुद्ध्यांक 150 आहे.”
“बरे झाले. मी त्याच्याशी गणिताविषयी बोलू शकतो.”
“हा दुसरा. याचा IQ 100 आहे.”
“बरं. भौतशास्त्राची उजळणी होऊ शकेल.”
“हा तिसरा. याचा IQ फक्त 50 आहे.”
“ग्रेट. मला नेहमीच शिक्षणतज्ञांशी गप्पा मारावेसे वाटत होते. ही तज्ञ मंडळी

शिक्षणाची इतकी कशी काय वाट लावू शकतात, हे एक माझे न सुटलेले कोडे आहे.”

(माझ्या मते शिक्षणतज्ञांचा IQ एवढा कमी नसावा. कारण ते भलतेच हुशार असून करून सवरून आपण त्यातले नाहीत म्हणून सटकून जाण्याचे, व शिक्षकांवर ढकलून देण्याचे कौशल्य त्यांच्याकडे आहे. व त्यासाठी 50 पेक्षा जास्त IQ असावा लागतो.)

डॉक्टर धन्यवाद देत व पुन्हा भेटू असे पुटपुटत चालू लागले.

प्रश्न 1 चे उत्तर:

एक जोडी पायमोजे म्हणजे किमान 2 पायमोजे तरी बाहेर काढावे लागतील. कॉलेजच्या क्लासपुढे हा प्रश्न ठेवल्यानंतर फारच कमी विद्यार्थी या प्रश्नाचे उत्तर देऊ शकले. काही जणांनी निळया रंगाच्या पायमोज्याच्या जोडीसाठी 11 वेळा, पांढऱ्यासाठी 10 वेळा व काळया रंगासाठी 9 वेळा पायमोजे बाहेर काढायला हवेत असे उत्तर दिले. काहींच्या मते हेच आकडे अनुक्रमे 20, 18 व 16 असे होते. एका दोघानी मात्र 4 पायमोजे काढल्यास एकाच रंगाची एक जोडी निघू शकेल असे बरोबर उत्तर दिले.

इतरांनी प्रश्न समजून न घेता उत्तर देण्याची घाई केली होती. प्रश्न विचारताना विशिष्ट रंगाचे सॉक्स हवेत असे कुठेही म्हटलेले नव्हते. त्यामुळे उत्तर द्यायच्या अगोदर प्रश्न नीटपणे समजून घेणे गरजेचे आहे.

प्रश्न 2 चे उत्तर:

अंकगणितीय पद्धती:

क ने 240 रुपये दिले याचा अर्थ एकूण 240 x 3 = 720 रुपये खर्च आला असेल. ही किंमत 8 बाटल्यांसाठी असल्यामुळे प्रत्येक बाटलीची किंमत 720/8= 90 रुपये असेल. त्यामुळे अ ला 90×5 – 240 = 450-240 = 210

रुपये व ब ला $90 \times 3 - 240 = 270 - 240 = 30$ रुपये
अशी वाटणी झाली असावी.

बीजगणितीय पद्धती:

X रुपये बाटलीची किंमत असून अ ला Y1रुपये व ब ला Y2 रुपये मिळाले असे गृहित धरता येईल. अ ने 5Xरुपये खर्च करून Y1 रुपये परत मिळविले व ब ने 3x रुपये खर्च करून Y2 रुपये परत मिळविले. यावरून समीकरणांची मांडणी अशी करता येईल

$Y1 + Y2 = 240,$

$5X - Y1 = 3X - Y2 = 240$

या समीकरणावरून

$5X - Y1 = 240$

$3X - Y2 = 240$

या दोन्हींची बेरीज

$8X - (Y1 + Y2) = 240 + 240 = 480$

परंतु

$(Y1 + Y2) = 240$

त्यामुळे

$8X - 240 = 480$

$8X = 720$

$X = 90$, (बाटलीची किंमत)

$Y1 = 210$ (अ ची बाकी) व

$Y2 = 30$ (ब ची बाकी)

असे उत्तर असेल.

●●●

गणिताविषयी अज्ञान

डॉ. भास्कर आचार्यांबरोबरच्या गप्पा... गणिताच्या!

आयुकाच्या कँटीनमध्ये कॉफी पीत असताना डॉ भास्कर आचार्यांनी मला पाहिले. समोरच्या खुर्चीवर बसल्यानंतर माझ्या हातात त्यांनी एक चिट्ठी सरकवली. नेहमीप्रमाणे त्यात दोन कूटप्रश्न होते.

प्रश्न 1:

500 किमी लांबीच्या रेल्वे मार्गावरील एका टोकाला एक इंजिन 'क्ष' आणि दुसऱ्या टोकाला अजून एक इंजिन 'य' उभे आहेत. क्ष इंजिन ताशी 150 किमी वेगाने व य इंजिन ताशी 100 किमी वेगाने धावू शकतात. क्ष इंजिनसमोर एक माशी बसलेली असून ती ताशी 200 किमी वेगाने उडू शकते. signal दिल्याक्षणी दोन्ही इंजिन्स समोरासमोर धावू लागतात व माशीसुद्धा सरळरेषेत य इंजिनच्या दिशेने उडू लागते. य इंजिनापर्यंत पोचल्यानंतर माशी पुन्हा क्ष इंजिनच्या दिशेने उडते. क्ष पर्यंत पोचल्यानंतर पुन्हा य इंजिनकडे.... शेवटी दोन्ही इंजिन्सची समोरासमोर टक्कर झाल्यावर माशी मरून पडते. मरण्यापूर्वी माशीने किती अंतर कापले असेल?

प्रश्न 2:

अदिती व अशोक आपल्या भावंडाबरोबर एकाच कुटुंबात राहतात. अशोकला जितके भाऊ आहेत तितक्याच बहिणी आहेत. आणि अदितीला बहिणींच्या दुप्पट भाऊ आहेत. त्या कुटुंबात एकंदर भाऊ व बहिणी किती आहेत?

"गंमतीशीर कोडी आहेत." चिट्ठी मी खिशात सरकवली.

डॉ. भास्कर आचार्य एक – दोन मिनिटं स्तब्ध बसून नंतर बोलू लागले. मला एक कळत नाही की तुम्हा लोकांना गणितातलं काही कळत नाही असे सांगण्यात अभिमान का वाटतो? आपल्या अज्ञानाचे एवढे उघड प्रदर्शन कशासाठी? मला आकडेमोड जमत नाही, मला त्यातलं काही कळत नाही यात काही तरी जिंकल्यासारखे वक्तव्य असते. हे असे का?

"बहुतेक जण गणित विषयाला घाबरत असावेत. गणित मुळात अमूर्त असल्यामुळे त्यापासून दूर राहणे पसंत करत असावेत."

कित्येक सुशिक्षितसुद्धा गणितांच्या प्राथमिक नियमाविषयी अनभिज्ञ असतात. खरे पाहता त्यांच्या कामात, रोजच्या व्यवहारात, भाषेच्या वापरात, सामान्यपणे विचार करण्यात गणिताला पर्याय नाही. परंतु त्यांचे वर्तन मात्र तर्काला धरून नसते. आता हेच पहा ना, 1999 च्या डिसेंबर 31 तारखेला जगभर उत्सव साजरा केला गेला. त्यादिवशी कुठला उत्सव होता?

"दुसऱ्या सहस्रकाचा शेवटचा दिवस म्हणून …"

कसला हा मूर्खपणा. पहिल्या सहस्रकातील पहिला वर्ष क्रि.श. 1 ची सुरुवात 1 जानेवारी 1 रोजी झाली व त्या वर्षाचा अखेर 31 डिसेंबर रोजी. क्रि.श. 2, 1 जानेवारी 2 ते 31 डिसेंबर 2 पर्यंत. त्याचप्रमाणे 3,4,5.. याच हिशोबाने क्रि. श. 1999, 1 जानेवारी 1999 ते 31 डिसेंबर 1999 पर्यंत असणार. आणि 2000 साल 1 जानेवारी 2000 ते 31 डिसेंबर 2000 पर्यंत असणार. त्यामुळे दुसरा सहस्रक 31 डिसेंबर 2000 रोजी संपतो, 31 डिसेंबर 1999 रोजी नव्हे. परंतु इलेक्ट्रॉनिक माध्यमांनी धुमाकूळ घातला व लोकांनी चक्क त्याला साथ दिली. लोकांच्या कसे काय ही गोष्ट लक्षात आली नाही व तथाकथित तज्ञ मूग गिळून गप्प का बसले? याच्या विरोधात आवाज का उठविला नाही?

"परंतु चूक उमगल्यानंतर आम्ही 2000 सालाचे स्वागत करत आहोत असे म्हणत होतोच की."

परंतु हे सर्व उशीरा सुचलेले शहाणपण व लंगडे समर्थन. तीसुद्धा कुणीतरी चूक दाखवली म्हणून. अजून एक गंमत सांगतो. काही वेळा बोलण्याच्या भरात अमुक अमुक स्पर्धेसाठी मी माझे 110 टक्के योगदान देण्यास तयार आहे असे छातीठोकपणे सांगताना मी ऐकलेले आहे. मला हे कळत नाही की आपल्या विश्वातील कुठलीही वस्तु वा तिचे अस्तित्व (entity) 100 टक्केच असते. हे वरचे 10 टक्के आले कुठून?

“ती एका प्रकारची बोलण्याची पद्धत आहे. त्यांना पूर्ण ताकतीनिशी प्रयत्न करणार आहे हे सांगायचे असते.”

तरीसुद्धा माझ्या मते 100 टक्क्यापेक्षा जास्त असे काही असू शकत नाही. जर तुम्ही त्याच प्रकारच्या गोष्टीशी तुलना करत असल्यास ती गोष्ट वेगळी. उदाहरणार्थ, मागच्या वर्षी पडलेल्या पावसाची या वर्षी पडलेल्या पावसाबरोबर तुलना करत असल्यास 110 टक्के वा 120 टक्के होऊ शकते. परंतु एक स्वतंत्र घटक म्हणून विधान करत असल्यास ती 100 टक्केपेक्षा जास्त असू शकत नाही. शिक्षक टक्केवारी शिकवत असताना या गोष्टी स्पष्ट का करत नाहीत? याच टक्केवारीच्या संबंधातील एका घटनेचा मी साक्षीदार होतो.

दिवाळीचा मोसम होता. एका दुकानात सेल होता. बाहेर लटकवलेल्या पाटीवर मोठ्या अक्षरात फॅक्टरीतर्फे 50 टक्के सूट आणि (फक्त) आजच्या दिवशी दिवाळी निमित्त आमच्या दुकानातर्फे आणखी 50 टक्के सूट. त्वरा करा. असे लिहिले होते. एक ग्राहक दुकानात शिरला व हजार रुपयाची एक वस्तू उचलून बाहेर जावू लागला. काउंटरवर त्याला अडविण्यात आले व 250 रु भरण्यास सांगितले. ग्राहक अवाक झाला. व चिडून मोठ-मोठ्याने भांडू लागला.

तुम्हीच बाहेरच्या पाटीवर येथील वस्तूवर फॅक्टरीतर्फे 50 टक्के व दुकानातर्फे

50 टक्के असे एकूण 100 टक्के सूट देणार आहात. त्यामुळे ही वस्तू आम्हाला फुकट मिळायला हवी. तुम्हाला एवढे साधे गणित येत नाही का?

काउंटरवरचा सेल्समन शांतपणे त्याला समजावून सांगू लागला.फॅक्टरी डिस्कौंट 50 टक्के म्हणजे या वस्तूची किंमत 500 रुपये आणि दुकानाचे 50 टक्के डिस्कौंट म्हणजे या वस्तूची आजची किंमत 250 रुपये. ग्राहक निमूटपणे 250 रुपये भरून निघून गेला.

"म्हणूनच आजकाल असले काहीही लिहिताना * अशी खूण करून जाहिरातीच्या खाली काही अटी लागू अशा डिस्क्लेमरचा उल्लेख करतात. त्यामुळे दुकानदार कोर्टाच्या भानगडीत अडकत नाहीत.

"जाऊ द्या हो. कुठे आहेत तुमचे विनोदी किस्से?"

किस्सा

काही वैज्ञानिक, अभियंते व इतर काही तज्ज्ञ एका ठिकाणी जमले होते. या तज्ज्ञांना गणिताचे कितपत ज्ञान आहे याची चाचणी घेण्यासाठी त्यांना फक्त एकच प्रश्न विचारला गेला.

सर्व विषम संख्यांना अविभाज्य संख्या (prime numbers) असे म्हणता येईल का?

या तज्ज्ञ मंडळीनी नोंदविलेल्या उत्तरात नक्कीच विविधता होती.

त्यातील काही मासलेवाईक नमूने –

रसायन शास्त्रज्ञ – अविभाज्य संख्या म्हणजे नेमके काय?

भौतशास्त्रज्ञ – 3 ही अविभाज्य संख्या, 5 ही अविभाज्य संख्या, 7 सुद्धा अविभाज्य संख्या, 9 सुद्धा…. नसेल परंतु प्रयोगातील चूक म्हणून त्याकडे दुर्लक्ष करता येईल. 11 ही अविभाज्य संख्या, 13 ही अविभाज्य संख्या….. यावरून सर्व विषम संख्या अविभाज्य असू शकतात.

प्राध्यापक – 3 प्राइम संख्या, 5 ही प्राइम संख्या, 7 सुद्धा प्राइम संख्या.... आता या नंतरच्या बाकीच्या गोष्टी विद्यार्थ्यांना होमवर्कसाठी देण्यात आलेले आहेत.
राजकीय विश्लेषक – काही विषम संख्या आहेत हे मला (आता) कळले. परंतु ही विषमता समाजातून उखडून टाकली पाहिजे. व ज्या संख्या अविभाज्यतेकडे जात आहेत त्यांचा विकास झाला पाहिजे.
अभियंता – 3,5, 7.... हे सर्व अविभाज्य आहेत. त्याचप्रमाणे 11, 13, 15, 17, 19 .... अविभाज्य आहेत. त्यामुळे सर्व विषम संख्या अविभाज्यच असणार.
संगणक तज्ज्ञ – 01 प्राइम, 10 प्राइम, 11 प्राइम, 101 प्राइम.....
जीवशास्त्रज्ञ – 1 अविभाज्य, 3 अविभाज्य, 5 अविभाज्य... ठीक आपण हे पेपर पब्लिश करून टाकू या.
मायक्रोसॉफ्ट वैज्ञानिक – 1 ही अविभाज्य संख्या, 3 हीसुद्धा अविभाज्य संख्या, 5, 7 बद्दल आपण पुढच्या रिलीजच्या वेळी अनौन्स करू या.
संख्याशास्त्रज्ञ – आपण काही random संख्या घेऊ या, 23, 31, 67.... यावरून सर्व विषम संख्या अविभाज्य आहेत असे म्हणता येईल.
कायदातज्ज्ञ – 3 ही अविभाज्य संख्या, 5 ही अविभाज्य संख्या, 7 सुद्धा अविभाज्य संख्या.... या भक्कम पुराव्यावरून इतर विषम संख्या अविभाज्य आहेत असे म्हणता येईल.
मानसतज्ज्ञ – 3 ही अविभाज्य संख्या, 5 ही अविभाज्य संख्या, 7 सुद्धा अविभाज्य संख्या, 9 सुद्धा.... आपण ही संख्या लक्षातच घ्यायचे नाही.....
व्यवस्थापन तज्ज्ञ – 3 ही अविभाज्य संख्या, 5 ही अविभाज्य संख्या, 7 सुद्धा अविभाज्य संख्या, 9 सुद्धा.... आपण यासाठी MOU वर सही करावी का?

हे सर्व तथाकथित तज्ञ नेहमीच गणिताला शिव्या का देतात हे या सर्वेक्षणातून नक्कीच कळू शकेल.

मला धन्यवाद देत डॉक्टर निघून गेले.

प्रश्न 1चे उत्तर :

रेल्वेच्या रुळावर दोन इंजिन्स समोरासमोर कशा काय धावू शकतात, वा हा अपघात टाळता आला नसता का किंवा त्या गरीब माशीचा जीव का घेता…. असल्या शंका-कुशंका बाजूला ठेऊन आपल्याला उत्तर शोधायचे आहे.

मुळात, अंतर = वेग x वेळ

माशीने कापलेले अंतर यासाठी माशीच्या उडण्याचा वेग (200 किमी/तास) व वेळ म्हणजे दोन्ही इंजिन्सची टक्कर होण्यासाठी लागलेला वेळ प्रथम शोधावे लागतील.

दोन्ही इंजिन्सचा सापेक्ष वेग 150+ 100 = 250 व अंतर = 500

यावरून अपघात होण्यासाठी लागलेला वेळ 500/250 = 2 तास एवढा असेल.

त्यामुळे माशी अपघातात मरण्यापूर्वी 200×2= 400 किमी अंतर धावली होती. (बीजगणितीय पद्धतीनेसुद्धा याचे उत्तर काढता येईल.)

प्रश्न 2 चे उत्तर :

त्या कुटुंबात क्ष भावंडे व य बहिणी आहेत असे गृहित धरल्यास

क्ष – 1 = य आणि

य – 1 = क्ष/ 2

अशी दोन समीकरणं मिळतील.

य = क्ष/ 2 + 1

∴ क्ष – 1 = य = क्ष/ 2 + 1

∴ क्ष – क्ष/ 2 = 2

∴ क्ष/ 2 = 2

∴ क्ष = 4 व य = 3

यावरून त्या कुटुंबात 4 भाऊ व 3 बहिणी आहेत.

●●●

(फसव्या) जाहिरातीच्या जगात

डॉ. भास्कर आचार्यांबरोबरच्या गप्पा… गणिताच्या!

हॉटेल वैशालीच्या एका कोपऱ्यात डॉक्टर आचार्य कॉफी पीत बसले होते. मी त्यांच्यासमोर बसल्यानंतर हातातील चिठ्ठी माझ्या हातात दिली. नेहमीप्रमाणे त्यात 2 कूटप्रश्न होते.

प्रश्न 1

वडील व मुलाचे आताचे वय अनुक्रमे 43 व 16 आहे. यानंतर किती वर्षांनी वडिलाचे वय मुलाच्या वयापेक्षा दुप्पट होईल?

प्रश्न 2

बुद्धीबळाच्या एका मॅराथॉन स्पर्धेसाठी 14539 बुद्धीबळपटूंनी नाव नोंदविले. स्पर्धेच्या नियमानुसार बाद पद्धतीच्या या स्पर्धेत जो हरतो त्याला स्पर्धेतून वगळले जाणार होते. जर खेळ ड्रा झाल्यास नाणे उडवून छाप काट्याद्वारे विजेता ठरवला जाणार होता व त्याला पुढच्या फेरीत खेळण्याची संधी मिळणार होती. किती डावानंतर अंतिम विजेता कोण हे ठरविणे शक्य होईल?

मी चिठ्ठी खिशात ठेवल्यानंतर डॉक्टर विषयाचा प्रस्ताव मांडतात.

टीव्हीवर जाहिरातींचा एवढा भडिमार का असतो याची तुम्हाला काही कल्पना आहे का?

“प्रेक्षकांनी त्यांचा माल विकत घ्यावा म्हणून..”

टीव्हीच्याऐवजी इंटरनेटवर ते का जाहिरात करत नाहीत? कारण बहुतेक प्रगत देशात इंटरनेटचा वापर मोठ्या प्रमाणात होत आहे व त्याचा फायदा जाहिरातदार घेऊ शकतात.

“टीव्हीएवढा प्रभाव त्याचा नसावा.”

मला वाटतं, फक्त तेवढच कारण नसावं. लोकांना माहिती शोधण्याचा कंटाळा येत असावा. त्यांना सर्व काही आयतेच मिळाले पाहिजे. चमच्यानी भरवायला हवे. टीव्हीचे जाहिरातदार याचाच फायदा घेत असावेत. यांच्या जाहिराती तद्दन भिकार, गुणवत्ता नसलेले, प्रेरणाशून्य असतात. ज्यांना थोडी तरी अक्कल आहे त्यांनी टीव्हीवर जाहिरात केलेल्या वस्तूंवर पूर्णपणे बहिष्कार टाकावा, या मताचा मी आहे.

"का म्हणून?"

"माझ्या या विधानामागे तर्कशुद्ध विचार आहे. वाईट जाहिराती वाईट जाहिरातदार बनवितात. वाईट जाहिरातदारांना काम देणाऱ्या उत्पादकांना आपल्या वस्तूंची जाहिरात बघितल्यावर ते चांगले आहे का वाईट हेही त्यांना कळत नाही. त्यांच्यावर व त्यांच्या उत्पादनांवर विश्वास ठेवता येत नाही. त्यामुळे जाहिरातीच्या माध्यमातून ग्राहकाच्या माथी मारू पाहणाऱ्या मालांची खरेदी करू नये. त्यांचा माल नक्कीच निकृष्ट दर्जाचाच असणार, यात शंका नसावी. अशा जाहिरातदारांचा MICQ अगदीच कमी असणार हे मी या अगोदरच सांगितले आहे. याचा अर्थ असा नाही की चांगल्या जाहिरातींच्या उत्पादनांची खरेदी करावी.

"परंतु आज जाहिरातीवर राग येण्याचे कारण काय?"

टीव्हीवरील कॉमर्शियल ब्रेकच्या वेळी एक जाहिरात दाखवित होते. लॅपटॉपवर ते तुम्हीच बघा. म्हणजे मला का राग येतो याचे कारण समजेल.

एक गोड चेहऱ्याची आई आपल्या आजारी पडलेल्या मुलीला कुठले औषध द्यावे याची विचारपूस पांढरा ऍप्रॉन घातलेल्या 'डॉक्टर'कडे करत होती. *या कंपनीची का त्या कंपनीची*. मुळात मुलगी आजारी वाटत नव्हती. आजारपणाचे ढोंग करणारी ही मुलगी चॉकलेट देणार म्हणून झोपवल्यासारखी वाटत होती. ही आई दोन कंपन्यांच्या गोळ्या डॉक्टरसमोर हातात धरून

कुठल्या गोळ्या देऊ अशी विचारत होती.
“मग…”
मग काय? कुठलाही शहाणा माणूस डॉक्टरांना असले मूर्खपणाचे प्रश्न कधी विचारेल का? डॉक्टर भास्कर आचार्य यांचा चेहरा लालबुंद झाला होता.

अजून एक उदाहरण देतो. अशाच एका औषध कंपनीची जाहिरात होती. काही वृद्ध पुरुष व स्त्रिया स्वत:च्या आजारपणाचे ‘अनुभवकथन’ करत होते. एक पडीक हीरो त्यांना खोदून खोदून प्रश्न विचारत होता. औषध किती गुणकारी आहे हेच ठसविण्याचा प्रयत्न तो करत होता. परंतु कार्यक्रमाच्या शेवटी हा हिरो औषधाच्या उपदुष्परिणामांची अक्षरश: यादी वाचून दाखवू लागला. मी तर अवाकच झालो. एवढे साइडइफेक्ट्स असतील तर हे औषध कुणी घेतील का? जाहिरातदाराच्या डोक्यात असले प्रश्न कसे काय शिरत नाहीत? असली औषधं बाजारात यायला नकोत. त्यावर बंदी घालायला हवी.
“औषध घेतल्यानंतर एखाद्या रुग्णावर काही विपरीत परिणाम झाल्यास उत्पादकावर खटला भरला जाऊ नये म्हणून ही काळजी.”
फारच विचित्र. गंमत म्हणजे हा हिरो एवढ्यावरच थांबत नाही. पुढच्या वेळी तुम्ही तुमच्या डॉक्टरला भेटल्यास हे औषघ लिहून देण्याचा आग्रह धरा, असे ठणकावून सांगतो. डॉक्टर असे काही तरी सांगेल का? मी याचीसुद्धा चवकशी केली.

डॉ. आचार्य लॅपटॉप उघडून डॉक्टर व पेशंट यांच्यातील संवादाची चित्रफीत दाखवू लागले.
बाई: डॉक्टर हे औषध माझ्यासाठी चांगले आहे का?
डॉक्टर: (शांतपणे) तुम्ही किती वर्ष वैद्यकीय शिक्षण घेतले आहे?
बाई: (गोंधळून) काहीच नाही.
डॉक्टर: मी पाच वर्षे मेडिकलचा अभ्यास केला आहे. त्यानंतर 2 – 4 वर्ष

हॉस्पिटलमध्ये काम केले आहे. व गेली 10 वर्षे मी येथे प्रॅक्टीस करत आहे. मी वैद्यकीय क्षेत्रात नवीन काही घडत असल्यास त्याकडे बारकाईने लक्ष ठेवतो. माझे या विषयीचे ज्ञान अद्यावत आहे. त्यामुळे तुमच्या आरोग्यासाठी काय हवे काय नको हे मला कदाचित तुमच्यापेक्षा जास्त कळते. जर तुम्ही सुचविलेले औषध चांगले असते तर मी तुम्हाला सांगितले नसते का?

बाई: परंतु टीव्हीच्या जाहिरातीत.....

डॉक्टर: जर तुमचा उपचार जाहिरात करत असल्यास तुम्ही खुशाल त्या जाहिरातदाराकडे जा व तुमची प्रकृती दाखवा.

डॉ. आचार्य लॅपटॉप बंद करत आजकाल डॉक्टर्स इतके निष्ठुरपणे बोलत नाहीत हेही तितकेच खरे. कारण शेवटी त्यांना धंदा करायचा असतो. औषधी कंपन्या त्यांना चारत असतात. असे म्हणाले.

"अजून कुठल्या जाहिरातीमुळे हे तुमचे मत झाले आहे?"

काही जाहिराती उघड उघड फसवत असतात. जाहिरातीवरची किंमत एक असते व प्रत्यक्ष विकत घेतानाची किंमत भलतीच असते. असे का म्हणून विचारल्यानंतर काही थातुर मातुर कारण सांगून खिसा रिकामा करतात. इंटरनेट प्रोव्हैडर्स जाहिरात करताना 100 mbps – 200 mbps स्पीड्स असे काही तरी जाहिरात करत असतात. प्रत्यक्ष डाउनलोड – अपलोड करताना हे स्पीड्स 20 ते 200 kbps असतात. (व यासाठीसुद्धा भरमसाट दर ठेवलेले असतात.) अशी जाहिरात करणारे खरोखरच सचोटीने व्यवहार करत असल्यास सत्य परिस्थती सांगून ग्राहकांचा विश्वास संपादन करू शकतात. परंतु या सर्वांना दिशाभूल करण्याची सवय जडलेली आहे.

टूथब्रश, टूथपेस्ट, सॅनिटरी नॅपकिन्स, मोटर सायकली, बाथरूम – संडास स्वच्छ करण्यासाठी लागणारे लिक्विड्स, गोरेपणा, केस गळण्याचे थांबविणारे – केस भरगच्च वाढविणारे -केस चमकदार व मुलायम बनविणारे तेल-क्रीम्स,

इत्यादींच्या उबग आणणाऱ्या जाहिराती बघत असताना तुम्हा लोकांना कंटाळा का येत नाही? राग का येत नाही? ज्या प्रकारे अशा मालांची जाहिरात केली जाते त्यावरून तरी या मालांवर बहिष्कार टाकायला हवे. थंड पेय पिण्यासाठी 200 – 300 मीटरवरून उडी का म्हणून मारायला हवे? लोहचुंबकाची पट्टी वापरून मानदुखी कशी काय कमी होवू शकते? अशी हजारो उदाहरणं देता येतील.

डॉक्टर पुन्हा एकदा लॅपटॉप उघडून अजून एका मासलेवाइक जाहिरातीची चित्रफीत दाखवू लागले.

जाहिरात करणारी बाई: उघड्या पायानी चालत असल्यास काचेचे तुकडे वा काटे टोचल्यामुळे पाय दुखू लागतात…

ग्राहक महिला: हो खरच की….

जा.क.बा.:तुमच्या पायाला भेगा पडतात. रक्त येते. पू भरू लागते. डॉक्टरी उपचार करावे लागतात. हॉस्पिटलमध्ये अॅड्मिट व्हावे लागते. काही वेळा तुमचा पाय कापावा लागतो.

ग्रा.म. : आई ग ! खरं की काय ? मग काय करायला हवे?

जा.क.बा.: आमच्या कंपनीचे बूट वापरा. सुरक्षित व आरामाचे जीवन जगा….

ग्रा.म : धन्यवाद! मी आजच बूट आणते व झोपेच्या वेळीसुद्धा बूट घालूनच झोपते..

अशा प्रकारे ती महिला एखादा अद्भुत खजिना सापडल्यासारखे बुटाला कवटाळते.

याच प्रमाणे आयुर्वेद औषधांच्या प्रचाराचासुद्धा उबग येतो. अशा जाहिरातीवर बंदी का नाही?

“ते शक्य नाही. कारण टीव्ही चॅनेल्सचे अर्थकारण अशा जाहिरातीवर अवलंबून आहे.”

जाऊ द्या हो…. माझ्यासाठी काही किस्से आहेत का?

किस्सा 1

एका आर्मी युनिटच्या कमांडरच्या बायकोनी जीव विमा कंपनीची एजन्सी घेतली. कमांडरची बायको असल्यामुळे युनिटच्या प्रत्येक रिक्रूटकडे जाऊन *जीव विमा उतरवा… त्याचे अमुक अमुक फायदे* असे काही ती सांगणार नव्हती. त्यामुळे कमांडंटनी हे काम सुभेदार मेजरकडे सोपविले. त्यानी हाताखालील 4 -5 सुभेदारांना बोलवून कोटा पूर्ण करण्याची ऑर्डर दिली. जास्तीत जास्त शिपायांनी विमा उतरविला पाहिजे असे फर्मान सोडले. एका सुभेदाराचा अपवाद वगळता इतरांची क्षमता अत्यंत सुमार होती. मात्र एका सुभेदाराने भरपूर शिपायांकडून विमा उतरविण्यास भाग पाडले. कमांडंट आश्चर्यचकित होत याचे रहस्य काय म्हणून त्या सुभेदाराला विचारले. काही विशेष नाही सर, मी त्या शिपायांना तुम्ही युद्धात वीर मरण पावल्यास सरकार तुमच्या कुटुंबाला एक लाख रुपये देते. परंतु तुम्ही हा विमा उतरविल्यास व युद्धात मृत्यु आल्यास सरकारला अडीच लाख रुपये द्यावे लागणार. यातून सरकारचे भरपूर नुकसान होणार. त्यामुळे कदाचित अशा विमाधारकांना फ्रंटवर पाठविणार नाहीत असे सांगत होतो. त्यामुळे ते पटापट विम्याचा पहिला हप्ता देवू लागले.

तर्कशुद्ध फसवणूक, छान… डॉक्टर आचार्य.

किस्सा 2

टीव्हीवर एका मानसोपचार केंद्राची जाहिरात वरचेवर झळकत होती. विषयानुसार ज्ञानवर्धक गोळया! अमुक गोळी घेतल्यास अमुक विषयावरील एकूण एक ज्ञान मेंदूत जाऊन तुम्ही त्या विषयाच्या कुठल्याही प्रश्नाचे अचूक उत्तर देवू शकता. ….

एका कॉलेजच्या विद्यार्थ्याला अजून तीन विषयांचे पेपर्स द्यावयाचे होते. अभ्यास झाला नव्हता. ज्ञानवर्धक गोळयांची जाहिरात त्याला वरदान ठरली. हा विद्यार्थी ताबडतोब जवळच्या मेडिकलच्या दुकानात गेला व अमुक अमुक कंपनीच्या गोळया आहेत का? याची विचारपूस केली.

"मला रसायनशास्त्राच्या गोळया हवेत.. "

काउंटरवरच्या सेल्समनने कपाटातून लाल गोळया दाखवत या गोळया "परीक्षेला जाण्यापूर्वी घेतल्यास तू सर्व प्रश्नांचे उत्तर लिहू शकशील. "

विद्यार्थ्याला ते काही पटले नाही. गोळीची चाचणी घेण्यासाठी त्यानी ती पटकन तोंडात टाकली. काही क्षणातच त्याच्या डोक्यात अणुरचना, प्रक्रियांचे समीकरण, व्हॅलन्स, कोव्हॅलन्स, बाँड, विकीरण… अशा गोष्टी तरंगू लागल्या.

"अद्भुत परिणाम…" विद्यार्थी आनंदित होऊन "तुमच्याकडे इतिहासाच्या गोळया आहेत का?"

सेल्समनने शांतपणे एक निळी गुळगुळीत गोळी त्याच्या हातावर ठेवली. ती गोळी तोंडात ठेवून चिघळत असतानाच इतिहासातील राजे – महाराजे, सनावळया, युद्धाचे प्रसंग, तहनामा, बखरी इत्यादीनी त्याचे डोळे गच्च भरले.

"उद्या माझा गणिताचा पेपर आहे. गणिताची गोळी आहे का?"

"मला खात्री नाही. परंतु थांब, मी शोधतो."

कपाटाच्या कोपऱ्यातील एका बाटलीत काळसर अशी एकच गोळी शिल्लक होती. ही गोळी दिसायला विद्रूप, खडबडित असी काहीतरीच होती. विद्यार्थ्याला ती काही आवडली नाही.

"शी, असली कसली ही घाण गोळी…"

"ठीक आहे. नको घेऊस. तुझ्यासारखे अनेक जण असेच म्हणत गोळी न घेता परत गेले आहेत. गणित हे नेहमीच पचनी पडण्यास कठिण असते."

अशा गोळ्यांचे पेटंट घ्यायला हवे. पुष्कळ पैसा कमवता येईल. पुन्हा भेटू” असे म्हणत डॉक्टर बाहेर पडले.

प्रश्न 1 चे उत्तर:

बीजगणितीय पद्धतीने याची मांडणी

43+क्ष = 2(16+क्ष) असे करता येईल.

समीकरण सोडविल्यास क्ष = 11 असे उत्तर येईल.

11 वर्षानंतर मुलाचे वय 27 व वडिलांचे वय 54 म्हणजे मुलाच्या वयापेक्षा दुप्पट होईल.

प्रश्न 2 चे उत्तर:

कदाचित विंबल्डनच्या टेनिस मॅचेसप्रमाणे जोड्यांचा हिशोब करत डोके खाजवत असाल. परंतु या स्पर्धेतील प्रत्येक डावात एक स्पर्धक बाद होणार व शेवटी एकही खेळ न हरता प्रत्येक डाव जिंकणारा विजेता ठरणार. त्यामुळे 14539 – 1 = 14538 डाव खेळल्या जातील.

अशा प्रकारे विचार करून उत्तर देण्यासाठीच्या पद्धतीला lateral thinking हे नाव आहे.

●●●

वाहतुकीच्या नियमांची ऐशी तैशी

डॉ. भास्कर आचार्याबरोबरच्या गप्पा... गणिताच्या!

रूपालीच्या आतल्या कोपऱ्यात डॉ. भास्कर आचार्य कॉफी पीत बसले होते. मला पाहता क्षणीच बसण्याची खूण करत खिशातून चिठ्ठी काढून माझ्या हाती सरकवली. चिठ्ठीतील कूट प्रश्न अशा प्रकारे होते.

प्रश्न 1

घोड्यांच्या रेसमध्ये भरपूर कमाई केलेल्या एका श्रीमंताचा वृद्धाप्यकाळात मृत्यु होतो. मृत्युपश्चात त्याच्या इस्टेटीची, मालमत्तेची वाटणी त्याच्या तिन्ही मुलात मृत्युपत्रानुसार करण्याची जबाबदारी त्याच्या वकिलावर होती. सर्व काही बापाच्या इच्छेनुसार वाटणी झाली. परंतु रेसच्या घोड्याच्या वाटणीच्या मुद्द्यावर गाडी अडून बसली. मृत्युपत्रात उल्लेख केल्याप्रमाणे एकूण घोड्यापैकी अर्धे घोडे पहिल्या मुलाला, एक तृतियांश घोडे मधल्या मुलाला व एक नवमांश घोडे धाकट्याला द्यावयाचे होते. परंतु मृत्युच्या वेळी त्यांच्याकडे फक्त 17 घोडे शिल्लक होते. काही घोड्यांची विक्री वा दान करून वाटणी न्यायसंमत ठरले नसते. खरे पाहता वकील भावाभावामध्ये भांडण लावून कमाई कशी करता येईल याचा विचार करत होता. परंतु मोठा भाऊ शेजारीच असलेल्या व रेसचे घोडे बाळगणाऱ्या वडिलाच्या मित्राला बोलावून या पेचप्रसंगातून मार्ग काढण्याची विनंती करतो. हा मित्र योग्य वाटणी करून तिढा सोडवतो. मित्राने हा तिढा कसा सोडवला असेल याची तुम्ही कल्पना करू शकाल का?

प्रश्न 2

एका राजकुमाराला शेजारच्या राज्यातील राजकुमारीशी लग्न करायचे होते. परंतु शेजारच्या राजाला हा राजकुमार स्वत:च्या मुलीशी लग्न करण्यास योग्य

आहे की नाही याची परीक्षा घ्यायची होती. परीक्षेत उत्तीर्ण झाल्यास लग्न लावून देण्यास त्याची हरकत नव्हती.
परीक्षेसाठी राजकुमार दरबारात हजर होतो. राजा त्याला तेथे एका बाजूला असलेल्या दोन बंद दरवाज्यांकडे बोट दाखवत यातील एक दरवाजा तुला वधस्तंभाकडे नेणारा व दुसरा तुला सुरक्षित ठिकाणी पोचविणारा आहे. या दरवाज्यांच्या पहाऱ्यासाठी रखवालदार आहेत. यापेकी एक रखवालदार नेहमी खोटे बोलणाऱ्या टोळीतला व दुसरा नेहमी खरे बोलणाऱ्या टोळीचा आहे. तुझे काम एवढेच की यातील एकाला असा प्रश्न विचारायचा की त्याच्या उत्तरातून तू सुरक्षितपणे बाहेर नेणाऱ्या दरवाज्यातून बाहेर पडू शकशील.
राजकुमाराने विचारलेला प्रश्न कोणता असेल?

खिशात चिठ्ठी ठेवत मी डॉक्टरांच्या बघत बसलो.

डॉक्टर क्षणभर गप्प बसून

तुमच्या येथील वाहतूक व्यवस्था इतकी गचाळ आहे की त्याची कल्पना करवत नाही. स्टीअरिंग व्हील हातात धरून बसलेला हा प्राणी नेहमीच युद्धाच्या आवेशात असतो की काय? समोर जे काही दिसेल त्याला धडक मारत पुढे पुढे जात असतो. रहदारीचे नियम पाळण्यासाठी नाहीतच हे त्याच्या मनात ठसविलेले असते अशी मला शंका आहे.

डॉक्टर आचार्य लॅपटॉप उघडतच रहदारींच्या नियमांची कशी पायमल्ली होत आहे याचे चित्रणच मला दाखवतात.

त्यानी दाखवलेला प्रसंग असा होता.

शहराच्या उपनगरातील एका अरुंद रस्त्यावर एक जण इंडिका / मारुती 800 टाइप असलेली कार मर्यादित वेगाने चालवत होता. रस्ता अरुंद व रस्त्याच्या दोन्ही बाजूला खणून ठेवलेले असल्यामुळे खड्ड्यात भरपूर चिखल व गढूळ पाणी. पाठीमागून एक स्पोर्ट्स युटिलिटी वेहिकल (SUV) जोराने भरधाव

वेगाने आली. कदाचित या SUVच्या मालकाला पुढे जाण्याची घाई असावी. रस्ता अरुंद असल्यामुळे ओव्हरटेक करून पुढे जाता येत नव्हते. हॉर्न वाजवतो. काही उपयोग नाही. पुढचा ड्रायव्हर शांतपणे जात असतो. गाडी रेस करतो. काही उपयोग नाही. पुढची गाडी अजूनही बैलगाडीच्याच वेगाने रस्त्याच्या मधोमध. एका विशिष्ट क्षणी SUVचा ड्रायव्हर डाव्या बाजूने ओव्हरटेक करून पुढे जातो. परंतु गाडी स्लिप होऊन खड्ड्यातील चिखलात घुसून रुतून बंद पडते. हा ड्रायव्हर हातवारे करत, ओरडत बाहेर काढण्याची विनंती करू लागतो. मात्र पुढचा ड्रायव्हर अगदी ढिम्म. कशी जिरली या तोऱ्यात हसत बाय बाय करत पुढे निघून जातो.

या प्रसंगातील प्रत्येकाच्या चेहऱ्यावरील बदलते भाव कॅमेऱ्यानी छानपैकी टिपलेले होते.

अजून एका प्रसंगात एक मस्तवाल तरुण सहा पदरी हायवेवर जास्तीत जास्त वेगाने गाडी चालवत असतो. पोलीसांची गाडी त्याचा पाठलाग करत एका वळणावर गाडी थांबविण्यास भाग पाडते. इन्स्पेक्टर त्याला काही प्रश्न विचारू लागतो.

इन्स्पेक्टर : एवढ्या वेगाने तू गाडी का चालवत होतास? ठिकठिकाणी लावलेल्या वेगमर्यादेच्या पाट्या तुला दिसल्या नाहीत का?

तरुण : मुळात गाडी चालवणे म्हणजे माझ्या जीवनशैलीची अभिव्यक्ती आहे. घटनेने मला स्वातंत्र्याचे हक्क दिले आहेत. त्यामुळे गाडीच्या वेगावर मर्यादा घालणे घटनाविरोधी कृती आहे. मी गाडी जोराने चालवणारच.

इन्स्पेक्टर : लेन बदलताना, ओव्हरटेक करताना तू काही सिग्नल्स वा हाताने खुणा का करत नाहीस?

तरुण: खुणा – बिणा, रहदारीचे नियम बायकांसाठी, म्हताऱ्यांसाठी असतात. माझ्यासाठी नाही.

इन्स्पेक्टर: गाडी जोरात चालविल्यामुळे इतर घाबरतात. त्यांना ब्रेक लावावे लागते. अपघात होतात. त्यांची तुला पर्वा नाही का?
तरुण: ज्याना अशा प्रसंगातसुद्धा नीटपणे गाडी चालवता येत नसल्यास त्यानी घरी बसावे. या रस्त्यावर खरोखरच मर्दानी छाती असलेल्यानीच गाडी चालवावे.
इन्स्पेक्टर: तुझ्या शेजारी तुझा मुलगा सीटबेल्ट न लावता बसलेला असल्यास याच वेगाने तू गाडी चालवशील का?
तरुण :बिनदिक्कत! माझ्या मुलाला अगदी लहानपणापासूनच स्पर्धेत यशस्वी कसे व्हायचे, सक्षम कसे व्हायचे, शक्तीशाली कसे व्हायचे हेच मी शिकविणार आहे. इतरांची काळजी करत बसल्यास तू यशस्वी होणार नाही हेच मी त्याला शिकविणार आहे.
इन्स्पेक्टर : ठीक…. पाच या संख्येला शून्य या संख्येने भागाकार केल्यास उत्तर काय येईल?
तरुण : (एका क्षणाचाही विलंब न लावता) शून्य.
इन्स्पेक्टर: यावरून तुला अक्कल नाही हे कळते. तुझ्यासारखे हजारो रस्त्यावर गाड्या चालवतात म्हणून ही दुरवस्था!
असे म्हणत इन्स्पेक्टर तरुणाला ढकलत ढकलतच पोलीसाच्या गाडीत कोंबतो.

काही तरुण व तरुणीसुद्धा अशा प्रकारे वागतात हे मात्र खरे. याविषयी सरकारही हतबल आहे.

हीच आमची तरुण पिढी असल्यास या पृथ्वीवरील MICQ 40 – 50 पेक्षा कधीच जास्त होणार नाही. जाऊ दे…

तुम्ही माझ्यासाठी काही किस्से आणले आहेत का?

कॉफीचा शेवटचा घोट घेत घेत मी त्याना हा किस्सा सुनावला.

एक्सप्रेस हायवेवर नुकतेच ठिकठिकाणी स्पीडगन्स, सीसीटीव्ही कॅमेरे बसविले होते. त्यामुळे वेगमर्यादा ओलांडणाऱ्यावर दंड बसविणे शक्य झाले होते. एका प्रसंगी वेगमर्यादा ओलांडल्याचे लक्षात आल्यावर ट्रॅफिक पोलीस पन्नाशीच्या वयातील स्मार्ट दिसणाऱ्या एका महिलेला गाडी बाजूला थांबविण्याची खूण करतो. बाई भलतीच सुसंस्कृत होती. हळू हळू गाडीची काच खाली सरकवत
“काय हवालदार, ओळखला नाहीत का? काही प्रॉब्लेम आहे का?”
“मॅडम, आपण 80 पेक्षा जास्त स्पीडने गाडी चालवत आहात. तुमचे ड्रायव्हिंग लायसेन्स बघू दे.”
“माझ्याकडे ते नाही. मी तुम्हाला दाखवू शकत नाही. ”
“का नाही?”
“दोन वर्षापूर्वी माझे लायसेन्स जप्त करण्यात आले. कारण मी दारूच्या नशेत गाडी चालवत…. ”
“….तुमच्या गाडीची कागदपत्र दाखवा.”
“सॉरी. ही गाडी माझी नाही. खरे म्हणजे या गाडीच्या ड्रायव्हरचा खून करून त्याचे तुकडे मी गाडीच्या डिकीत कोंबलेले आहेत. दाखवू का?”
पोलीस खरोखरच घाबरला. त्याची बोबडी वळली. बाईला गाडीतच बसण्याची खूण करत तो आपल्या वरिष्ठाला फोन लावला. त्याचे बारकाईने बाईकडे लक्ष होते. बाई शांतपणे च्युयिंगगम चघळत बसली होती.

15 -20 मिनिटात 5 -6 पोलीसांच्या ताफ्यासह त्याचा वरिष्ठ अधिकारी तेथे आला. पोलीसानी पुन्हा एकदा त्याला ब्रीफिंग केले. थोडेसे घाबरतच हा अधिकारी बाईच्या गाडीपाशी गेला.
” मॅडम, माझा सहकारी तुम्ही दारूच्या नशेत गाडी चालविल्यामुळे तुमचे ड्रायव्हिंग लायसेन्स जप्त करण्यात आले आहे.असे सांगतोय. खरे की खोटे?”
“खोटे. हे बघा माझे लायसेन्स.” पर्समधील लायसेन्स काढून इन्स्पेक्टरच्या

हातात देते. अधिकारी आश्चर्यचकित नजरेने लायसेन्स पुढे मागे पुढे करून बघतो व लायसेन्स परत करून

"माझा हवालदार तुमच्या गाडीच्या डिकीत प्रेत आहे म्हणून सांगतोय..."

बाई डिकीची चावी त्याच्या हातात देत "तुम्हीच उघडून खात्री करून घ्या. ...."

उघडून पाहिल्यावर डिकी रिकामी असते.

"माझा तो सहकारी.... मला कळत नाही......."

बाई मात्र शांतपणे, "इन्स्पेक्टर, तुमचा हवालदार चक्क खोट बोलतो. कारण मी त्याला लाच दिली नाही. आता तो मी वेगमर्यादा ओलांडली म्हणूनही सांगेल."

इन्स्पेक्टर पूर्णपणे गोंधळलेला. तो हवालदारकडे जातो व बाई पुहा पूर्ण वेगाने गाडी चालवत अदृष्य होते.

"कधी तरी या बाईला पकडून मोठ्या प्रमाणात दंड ठोकायला हवे." डाक्टरांचे स्वगत.

"आणखी काही...."

एक तरुण नवरा जोरजोराने किंचाळतच किचनमध्ये येऊन बायकोवर खेकसतो,

"हे काय? तुला काही समजत की नाही? दूध उकळतय! खाली सांडतय! जरा गॅस कमी कर बघू!

हे काय चाललय मला कळतच नाही! भांडं खाली घे... चिमट्यानी.. हात भाजेल... तुला कसं कळणार! कधी कळणार! ओ माय गॉड..... काही तरी कर..."

बायको त्याच्याकडे निरखून बघत "तुला झालयं तरी काय? असा का किंचाळतो? एवढा आरडा ओरडा कशासाठी? तुला काय वाटतं मला दूध

तापविता येत नाही?”
“माय डीअर… तुला हे सर्व माहित आहे. कबूल. आवाज हळू हळू करत नवरा सांगू लागतो. मी जेव्हा तुला शेजारी बसवून गाडी चालवत असतो तेव्हा काय परिस्थिती असते याची एक झळक मी आता तुला दाखवत होतो. तुझा वैताग, तुझा आरडाओरडा… तुझ्या हजार सूचना. त्या वेळी माझे काय हाल होत असतात…..”

“छान किस्सा. आपल्या गप्पा छान रंगतात. भेटू पुन्हा कधी तरी…. “असे म्हणत डॉक्टर बाहेर पडले.

प्रश्न 1 चे उत्तर:

मृत्युपत्रात उल्लेख केलेल्या अपूर्णांकांची बेरीज पूर्णांकात दाखवल्यास अट पूर्ण होऊ शकेल. मृत्युपत्रा प्रमाणे

$1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18 < 1$

शेजारच्यानी स्वत:चा घोड्याला इतर घोड्यांच्या सोबत उभे करून 18 घोड्यांची वाटणी करतो. वाटणीप्रमाणे पहिल्या मुलाला 9 घोडे, मधल्याला 6 घोडे व धाकट्याला 2 घोडे वाटून शेजारचा मित्र बाकी राहिलेला आपला घोडा घेऊन निघून जातो.

(सगळी मुलं खुष होतात. शेजारी मदत केल्याबद्दल समाधानाने घरी जातो. परंतु वकील अस्वस्थ होतो. कारण भावंडामध्ये वाटणीवरून भांडण लावून पैसे कमविण्याची त्याची संधी हुकलेली असते !)

प्रश्न 2 चे उत्तर:

राजकुमारला कुठल्याही एका रखवालदाराला खालील प्रश्न विचारल्यास सुखरूपपणे बाहेर घेऊन जाणाऱ्या दरवाज्यातून जाणे शक्य होईल
तू जर दुसऱ्या टोळीचा असता तर मला सहिसलामत बाहेर जाण्यासाठी कुठल्या दरवाजाने जायला सांगशील?

जर रखवालदार खरे बोलणाऱ्या टोळीतला असल्यास खोटे बोलणारा रखवालदार वधस्तंभ असलेल्या दरवाज्यातून जाण्यास सांगितला असता याची त्याला खात्री होती. त्यामुळे राजकुमाराने त्यानी बोट दाखवलेल्या दरवाज्याऐवजी दुसऱ्या दरवाज्याने बाहेर जाईल.

जर रखवालदार खोटे बोलणाऱ्या टोळीतला असल्यास खरे बोलणारा रखवालदार सुरक्षितरित्या बाहेर जाणाऱ्या दरवाज्याकडे बोट दाखविला असता असे विचार करून येथेही खोटे सांगून राजकुमाराला वधस्तंभ असलेल्या दरवाज्याकडे बोट दाखवेल. राजकुमार मात्र त्यानी दाखविलेल्या दरवाज्यातून न जाता दुसऱ्या दरवाज्याने जाईल.

अशा प्रकारे रखवालदार कुठल्याही टोळीचा असला तरी राजकुमार रखवालदारानी दाखविलेल्या दरवाज्याऐवजी दुसऱ्या दरवाज्यातून बाहेर पडणे सुरक्षित ठरेल.

(अशा प्रकारच्या या गप्पांना अंत नाही. परंतु डॉ. भास्कर आचार्य कित्येक दिवस दिसले नाहीत म्हणून या गप्पांना (तात्पुरती) विश्रांती)

●●●

‘42’ ची अशीही गोष्ट

‘42’ ची अशीही गोष्ट हे शीर्षक वाचल्यानंतर अनेकांच्या मनात वेगवेगळ्या प्रतिक्रिया उमटतील, याची पूर्ण कल्पना आहे. काहींना 1942च्या स्वातंत्र्य लढ्याची आठवण येईल; काहींना दुसऱ्या महायुद्धाच्या काळातील 1942 साली घडलेल्या घटना आठवू लागतील; काहींना ‘समर ऑफ फॉर्टी टू’ या इंग्रजी चित्रपटाची आठवण येईल; काहींना ‘नायंटीन फॉर्टी टू लव्ह स्टोरी’ या हिंदी चित्रपटाची आठवण ताजी करेल; तर काहींना हॅरिसन फोर्डच्या बेसबॉलवरील ‘42’ या चित्रपटाची आठवण येईल. परंतु ही गोष्ट आहे 42 या संख्येबद्दलची व या संख्येच्या करामतीची.

गणिताचे छंद जोपासणाऱ्यांना काही संख्या नेहमीच बुचकळ्यात टाकतात. त्यापैकी 42 हीसुद्धा अशीच एक चमत्कारिक संख्या आहे. गोष्टीसाठी हीच संख्या का निवडली या प्रश्नाला उत्तर नसले तरी 42 बद्दलच्या गणितीय दृष्टिकोनाबरोबर त्याच्याशी जोडलेल्या इतर गोष्टीही तितक्याच मनोरंजक आहेत याबद्दल दुमत नसावे.

गूगलच्या सर्च इंजिनवर 42 ही संख्या टाइप केल्यास त्यासंबंधी 100 कोटीहून अधिक नोंदी सापडतील. विकिपिडियाची पानं उलगडल्यास 42 या संख्येबद्दल मोठ्या प्रमाणात माहिती त्यात असेल. गणित, विज्ञान, तंत्रज्ञान, खगोलशास्त्र, धर्म इत्यादींच्या बरोबरच ‘अलाइस इन वंडरलँड’चे लेखक, लुइस कॅरोलच्या पुस्तकात, डोग्लास ॲडम्सच्या ‘हिचहायकर्स टु द गॅलक्सी’ या वैज्ञानिक कादंबरीत 42 या संख्येचा कशा खुबीने वापर करून घेतला आहे याचे उल्लेख सापडतील. त्याचप्रमाणे संगीत, आर्थिक व्यवहार, टीव्ही मालिका, चित्रपट, व्हिडिओ गेम्स, क्रीडा प्रकार, वास्तुशास्त्र, कार्टून पुस्तकं इत्यादींच्यात 42 या संख्येचा वापर कशा प्रकारे करण्यात आला आहे, याची मनोरंजनात्मक माहिती वाचावयास मिळेल.

डोग्लास अॅडम्सच्या ‘हिचहायकर्स टु द गॅलक्सी’ या पाच पुस्तकांच्या मालिकेतील पाचव्या पुस्तकाच्या शेवटी-शेवटी डीप थॉट या सुपरसंगणकाला ‘जगातील अत्यंत महत्वाच्या प्रश्नाचे उत्तर काय असेल?’ असे विचारल्यावर संगणकाच्या स्क्रीनवर फक्त 42 ही संख्या झळकते. या उत्तरामुळे कादंबरीतीलं पात्रेच नव्हे तर वाचकही नक्कीच बुचकळ्यात पडले असावेत. 42चे हे गौडबंगाल आहे तरी काय याबद्दलची उत्सुकता नक्कीच शिगेला पोचली असेल.

खरे पाहता वाचक नेहमीच कुठल्याही गोष्टीमागील, घटनेमागील रहस्य जाणून घेण्यात व/वा गूढ उकलण्यात सदैव उत्सुक असतो. म्हणूनच मुद्रणाच्या शोधापासूनच्या काळापासून आतापर्यंत रहस्यकथांना (व रहस्यकथालेखकांना) भरपूर मागणी आहे. इतर कुठल्याही साहित्यप्रकारापेक्षा गूढकथा-हेरकथा कादंबरीचे दालन अत्यंत समृद्ध आहे. त्यातही टीव्ही व चित्रपटामुळे गूढकथा-पत्तेदारी कादंबऱ्या लाखोनी, नव्हे करोडोनी, खपत असावेत. या स्मार्ट फोनच्या बहुविध करमणुकीच्या काळातसुद्धा गूढतेची जादू किंचितशीसुद्धा कमी झालेली नाही.

त्यामुळेच डीप थॉट या (काल्पनिक) महासंगणकाकडून मिळालेल्या जगातील अत्यंत महत्वाच्या प्रश्नाचे उत्तर 42 ही संख्या नक्कीच कुणालाही धक्कादायक ठरू शकेल. डीप थॉटला हे उत्तर शोधण्यासाठी 75 लाख वर्ष लागली म्हणे. त्या कादंबरीतील इतर कॅरेक्टर्सना हे उत्तर नक्कीच पटलेले नसावे. कारण या उत्तरातून काही बोध होत नसावे. मुळात या प्रश्नातच काहीतरी गोलमाल आहे असे डीप थॉटला वाटत असावे. संगणकाला हा प्रश्न गार्बल्ड वा चुकीचा वाटत असावा. कदाचित 42 या उत्तराला शोभेल अशा प्रश्नाची पुनर्मांडणी करण्यास या संगणकाला अजून एका नव्या संगणकाची रचना करावी लागेल व त्यासाठी भरपूर वेळ खर्ची घालावे लागतील. कदाचित

हे नवे संगणक दुसरे-तिसरे काही नसून पृथ्वी हेच एक संगणक असू शकेल. यानंतर नेमके काय होते हे समजून घेण्यासाठी डोग्लास अॅडम्सची पुस्तकं मुळापासून वाचायला हवीत.

डोग्लास अॅडम्सची ही पुस्तकं वाचून प्रेरित झालेले अनेक उत्साही छंदोपासक 42 या संख्याभोवतीचे गूढ उकलणे हा छंद जोपासून आहेत. हा छंद जोपासणाऱ्यांची संख्याही झपाट्याने वाढत आहे. मुळात या छंदाची सुरुवात गप्पा-टप्पाच्या ओघात, हास्यचुटकीवरून वा एखाद्या तिरकस विधानावरून झाली असावी. उदाहरणार्थ, प्रश्नाची पुनर्मांडणी करत ‘सगळ्याच गोष्टींचे उत्तर काय?’ असे गूगलवर (इंग्रजीत) टंकित केल्यावर बहुतेक वेळा 42 असेच उत्तर आले असावे. फ्रेंच-जर्मन-स्पॅनिश अशा इतर युरोपियन भाषेतून विचारल्यावरसुद्धा गूगलवर हेच उत्तर आल्यामुळे आश्चर्यचकित झालेल्यांची संख्या कमी नसावी. तसेच गूगलच नव्हे तर क्वाँट, उल्फ्रॅम अल्फा वा चॅटबॉटसारख्या सर्च इंजिनवर प्रश्न विचारल्यावरही हेच उत्तर आल्यामुळे प्रश्न विचारणारे अचंबित झाले असतील. (कदाचित भारतीय भाषेपर्यंत हे लोण अजूनही पोचले नसेल.)

या 42च्या छंदाची सुरुवात 2013मध्ये फ्रान्स येथील एका खाजगी प्रशिक्षण केंद्रातून झाली. त्याचे नाव ‘फॉर्टीटू नेटवर्क’ असे ठेवण्यात आले. अॅडम्सच्या पुस्तकवाचकांनीच (किंवा ‘42’ चित्रपट पाहून आलेल्यापैकी कुणीतरी) हे नाव ठेवले असावे. आज या नेटवर्कचे जगभर सुमारे 15 तरी प्रमुख केंद्र असावेत.

42 या संख्येभावती अनेक आख्यायिका व काही मजेशीर गोष्टी वाचावयास मिळतील. उदाहरणार्थ,

- हिंदू धर्मशास्त्रात 18 पुराणे, 14 मुख्य उपनिषद, 4 वेद व 6 दर्शने, असे (18+14+4+6=42) 42 गोष्टींचा उल्लेख आहे.

- इजिप्तच्या पुराणकथेत 42चा उल्लेख करताना मृत आत्म्याला 42 न्यायाधीशासमोर उभे केले जाते व ही आत्मे 42 प्रकारच्या पापातील एकाही पापाचे धनी नाहीत याची खात्री करून घेतल्यानंतरच त्यांना स्वर्गात प्रवेश मिळतो.
- 42 ही संख्या स्पायडरमॅन: इन्टू द स्पायडर-व्हर्स *या* साहसीकथांच्या चित्रपटात अनेक वेळा वापरल्यामुळे या संख्येला अमाप प्रसिद्धी मिळत आहे.
- 1966मध्ये पॉल कूपर या गणितज्ञाने पृथ्वीच्या एकमेकाच्या विरुद्ध टोकाला असलेल्या दोन ठिकाणी (उदाः उत्तर धृव ते दक्षिण धृव) कमीत कमी वेळात (व कमीत कमी प्रवास खर्चात) पोचण्यासाठी एक नामी कल्पना मांडली. त्याच्या मते पृथ्वीच्या एका टोकाला ट्यूब रेल्वे जाण्याइतपत एका ठिकाणाहून विरुद्ध दिशेला असलेल्या ठिकाणापर्यंत आरपार बोगदा खोदल्यास गुरुत्वाकर्षण शक्तीनेच विरुद्ध ठिकाणी कमीत कमी वेळात पोचता येते व त्यासाठी फक्त 42 मिनिटं लागतात. (त्या ट्यूब ट्रेनचे नाव ग्रॅव्हिटी ट्रेन असेल.) यात कुठल्याही प्रकारचे घर्षण असणार नाही असे गृहित धरले आहे. हीच कल्पना लुइस कॅरोल यांनी 1893मध्ये त्याच्या सिल्व्ही अँड ब्रुनो कन्क्ल्युडेड या पुस्तकात मांडली होती. (खरे पाहता या प्रवासाला 42 ऐवजी फक्त 38 मिनिटं लागतात, असे तज्ञांचे म्हणणे आहे.)
- मॅराथॉन या क्रीडा प्रकारातील पळण्यासाठीचे अंतर 42.195 किमी आहे. या अंतराच्या निश्चितीमागे एक दंतकथा आहे. इ.स.पू. 490 साली पर्शिया बरोबरच्या मॅराथॉन युद्धात विजय संपादन केल्यानंतर ती बातमी सांगण्यासाठी फिलिडिपाइड्स हा रोमन सैनिक युद्धठिकाणाहून अथेन्सपर्यंत पळत गेलेले अंतर सुमारे 42 किमी होते म्हणे. (त्या काळी

किलोमीटर्स ही संकल्पना माहित नसली तरी त्यावेळच्या अंतर मोजण्याच्या मोजमापावरून नेमके 42 किमी हे अंतर येणे हा निव्वळ योगायोग नसावा)

- प्राचीन तिबेटवर राज्य केलेल्या लामांची संख्या 42 आहे. इ.स.पू. 127च्या सुमारास न्यात्सी त्सेम्पो हा पहिला राजा; तर शेवटच्या राजाचे नाव लँगडर्मा असे होते. त्याचा राज्यकाल इ.स. 836 ते 842. (येथेही 42 संख्या!)
- मुद्रणयंत्राचा शोधक गुटेनबर्ग यानी मुद्रित केलेले पहिले पुस्तक बायबल होते. त्यातील प्रत्येक रकान्यात 42 वाक्ये होती. म्हणूनच त्याच्या बायबलला ‘फॉर्टीटू लाइन बायबल’ असे म्हटले जात होते.
- न्यूयॉर्क शहरातील 42nd Street प्रसिद्ध रस्ता आहे. याच मार्गावर क्रायस्लर बिल्डिंग, ग्रॉंड सेंट्रल टर्मिनल, न्यूयॉर्क लायब्ररी, टाइम्स स्क्वेरसारखी ठिकाणं आहेत. या स्ट्रीटच्या पूर्वेला संयुक्त राष्ट्र संघाची इमारत आहे.
- मायक्रोसॉफ्टच्या धोरणाप्रमाणे विंडोज डोमेनसाठीचे पासवर्ड्स 42 दिवसानंतर निरुपयोगी ठरतात.
- चायनिज भाषेतील yes साठीचा शब्दोच्चार 42च्या जवळपासचा आहे. त्यामुळे तरुण चायनीज एसएमएस पाठवताना 42चा मुबलक प्रमाणात वापर करतात.
- ‘टॉवर 42’ ही लंडन शहरातील बहुमजली गगनचुंबी इमारत आहे. त्याचे पूर्वीचे नाव नॅटवेस्ट टॉवर असे होते.
- द्यूत वा सोंगट्याच्या खेळातील 2 फासेवरील खुणांची बेरीज (1+2+3+4+5+6)x2 = 42 असते.

- खेळातील पत्त्यांच्या एका डेकमध्ये 42 ‘डोळे’ आहेत; दोन्ही डोळे असलेले (बदाम, इस्पिक व किलवर) तीन राजे, एकच डोळा असलेला (चौकटचा) राजा, (दोन्ही डोळे असलेल्या) चारी राण्या, दोन्ही डोळे असलेले (चौकट व किलवर) दोन गुलाम, व एकच डोळा असलेले (बदाम व इस्पिक) दोन गुलाम असे (3x2+1+4x2+2x2+2x1) = (6+1+8+4+2) = 21)
21 एका बाजूला व अजून 21 दुसऱ्या बाजूला असे एकूण 42 डोळे.
- क्रिकेट या मैदानी खेळाचे नियम बनविणाऱ्या एमसीसी या लंडनमधील क्रिकेट क्लबने खेळासाठी 42 नियमांची यादी केली आहे. त्यातील 42वा नियम fair व unfair खेळासंबंधी आहे.
- लुई कॅरालच्या ‘अलाइस इन वंडरलँड’च्या गोष्टीतील एका मैलापेक्षा जास्त उंची असलेल्यानी दरबारातून निघून जावे हे विधान 42व्या नियमानुसार आहे, असा उल्लेख पुस्तकात आहे.
- लुई कॅरालच्या ‘दि हंटिंग ऑफ दि स्नार्क’ या कवितेतील बेकर या विसराळूच्या पेट्यांची संख्या 42 आहे.
- लुई कॅरालच्या ‘अलाइस इन वंडरलँड’च्या प्रथम आवृत्तीच्या मूळ पुस्तकात 42 चित्रं होती.
- हिचहायकर्स गाइड टु गॅलक्सी’चे लेखक, डोग्लास ॲडम्सला ‘20व्या शतकाचा लुई कॅराल’ असे ऑब्जर्व्हर या पत्रिकेने सन्मानित केले आहे.

‘हिचहायकर्स गाइड टु गॅलक्सी’ या पुस्तकाच्या रेडियोवरील वाचनाचा 42व्या जयंतीच्या निमित्ताने फार मोठा संमारंभ साजरा करण्यात आला. गंमत म्हणजे अशा प्रकारे 42वी जयंती समारंभ इतर कुठल्याही गोष्टी वा घटनेबाबत साजरा केल्याचे ऐकीवात नाही.

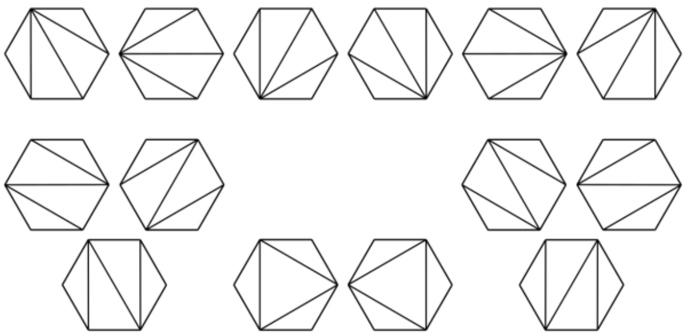
- डोग्लास ॲडम्सच्या पुस्तकात उल्लेख असलेल्या 42 या संख्येच्या मागे लेखकाचे वैशिष्ट्यपूर्ण अशी एखादी गोष्ट असावी असे वाटण्याचा संभव आहे. परंतु त्यांच्या बरोबरच्या ऑनलाइन चर्चेत त्यांना हा प्रश्न विचारल्यानंतर अगदी थोडक्यात त्यानी दिलेले उत्तर असे होतेः हा एक जोक होता. मला एक साधी, सरळ, सोपी व लहान अशी संख्या हवी होती. त्यावेळी सुचलेली ही संख्या आहे. त्यात 2 आधारांकाची (बेसची) बायनरी वा 10 बेस असलेली दशमान पद्धतीतील वा 13 आधारांक (बेस) असलेल्या पद्धतीतील संख्या असे काहीही नाही. तिबेटच्या राजांची संख्या याला काही अर्थ नाही. मी डेस्कसमोर बसलो. खिडकीतून बाहेर बघत होतो. व 42 ही संख्या सुचली व मी टाइप करत गेलो. एवढाच त्यामागील इतिहास. बस्स...
- दशमान पद्धतीत 10 ही जशी आधारांक (बेस) असते, तसे बायनरीत 2 ही बेस असते. या बायनरी पद्धतीत 42 ही संख्या 101010 असे लिहिले जाते.
- बायनरीमध्ये लक्षात ठेवायला सोपी असलेल्या 42चे छंद असलेल्यांनी 10 ऑक्टोबर 2010 रोजी जंगी पार्टीचे आयोजन केले. ॲडम्सने उल्लेख केलेल्या 13 बेस असलेली संख्या अप्रत्यक्षपणे 42चे प्रतिनिधित्व करते. यासाठी 6 गुणिले 9चे उत्तर काय हा प्रश्न विचारावा लागेल. प्रश्न गोंधळून टाकणारा असला तरी 6 x 9 = 54 हे उत्तर 13 बेस असलेल्या पद्धतीत लिहिल्यास ते 42 (4x13)+2 = 54 म्हणून लिहावे लागेल.
- गणितज्ञांच्या 42बद्दलच्या अशा काही उदाहरणाहून प्रेरित होऊन संगणक तज्ञसुद्धा आपणही मागे नाही हे सिद्ध करण्यासाठी प्रयत्न करत आहेत. त्यामुळे गणितविश्वात 42 या संख्येला एक वेगळे वैशिष्ट्य प्राप्त झाले आहे. तरीसुद्धा गणिताच्या दृष्टिकोनातून या संख्येकडे बघितल्यास अजूनही अनेक गंमतीशीर गोष्टी कळू लागतील.

- 2 या संख्येच्या पहिले तीन विषम घातांक असलेल्या संख्यांची बेरीज 42 आहे. $2^1 + 2^3 + 2^5 = 42$
- फक्त 4 ही संख्या काही वेळा वापरून 42 अशा प्रकारे लिहिता येईलः
  ((4+4)/0.4444)+4! =8/(4/9)+(4x3x2x1)
  =(8x9/4)+24=18+24=42
- 42 ही संख्या 6 या संख्येचा पहिल्या 2 घातांकाच्या बेरजेतूनही मिळते. $6^1 + 6^2 = 42$
- 42 या संख्येला Harhad (वा Niven) संख्या म्हणून ओळखले जाते. कारण या संख्येला त्याच्या अंकाच्या बेरजेने भागाकार केल्यास पूर्णांक मिळतो. (42 /(4+2)) =42/6=7
- 42 ही संख्या कॅटलान संख्या म्हणून ओळखली जाते. अपरिमेय संख्यापेक्षा या संख्या दुर्मिळ आहेत. सुरुवातीच्या 100 कोटी संख्येतील काही कॅटलान संख्याः 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, ... युजिन चार्ल्स कॅटलान (1814–1894) या फ्रेंच-बेल्जियन गणितज्ञाने $c(n)$ ही संख्या कंसाच्या जोड्यासारखे *n प्रकारे लिहिता येते, यावरून* एका सूत्राचा शोध *केला. कंस हे नेहमीच जोड्यानेच येतात. जितके कंस उघडल्या जातात तेवढ्याच बंद कराव्या लागतात. उदाहरणार्थ,* $c(3) = 5$ प्रकारे लिहिता येऊ शकतेः

  ((( ))); ( ) ( ) ( ); (( )) ( ); (( ) ( )); ( ) (( ))

या श्रेणीतील (sequence) *n*th पद शोधण्यासाठी $c(n) = (2n)! / (n!(n + 1)!)$ या सूत्राचा वापर केला जातो.

convex बहुभुजाकृतीच्या (ज्या बहुभुजाकृतीच्या आतील कोन 180 अंशापेक्षा कमी अंशाचा असू शकतो त्या आकृतीच्या) शिरोबिंदूना सरळरेषेंनी जोडून किती त्रिकोनांची रचना करता येते याचा शोध घेत असताना कॅटलान संख्यांचे वैशिष्ट्य लिओनार्ड ऑयलर या स्विस गणितज्ञाच्या लक्षात आले.



- 42 ही संख्या प्रॅक्टिकल संख्या म्हणूनही ओळखली जाते. या प्रॅक्टिकल संख्यांचे वैशिष्ट्य म्हणजे या संख्यांच्या विभाजकांच्या उपसंचाची बेरीज प्रॅक्टिकल संख्या वा तिच्यापेक्षा कमी असलेल्या सर्व संख्या एवढी असते. उदाः 18 या संख्येचे विभाजक 1, 2, 3, 6, 9 असून 18 पेक्षा कमी असलेल्या 1 ते 18 पर्यंतचे सर्व आकडे या विभाजकांच्या बेरजेतून दाखवता येतील. उदाः 1, 2, 3, 4 (1+3), 5 (2+3), 6 (1+2+3), 7 (1+6), 8 (2+6), 9, 10 (1+9), 11 (2+9), 12 (3+9), 14 (2+3+9) , 15 (6+9), 16 (1+6+9), 17 (2+6+9)

42 ही एक प्रॅक्टिकल संख्या असून 42च्यापेक्षा कमी असलेल्या सर्व संख्या त्याच्या (1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 42) विभाजकांची बेरीज करून लिहिता येऊ शकते. या संख्यांच्या श्रेणीतील सुरुवातीच्या काही संख्या असे आहेतः 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40,42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, …. इ.इ...

भारतीय गणितज्ञ श्रीनीवासन यांनी 1948मध्ये सर्व प्रॅक्टिकल संख्यांचे 1 व 2 यांचा अपवाद वगळता 4 वा 6 वा हे दोन्ही संख्या विभाजक असतात, असा शोध लावला.

- 42 या संख्येचे अरिथमॅटिक (arithmetic) संख्या म्हणूनही ओळख आहे. ज्या संख्याचे विभाजकांची सरासरी पूर्णांक असल्यास ती संख्या अरिथमॅटिक संख्या म्हणून ओळखली जाते. उदाः 20 या संख्येचे 1, 2, 5, 10 व 20 विभाजक आहेत. या विभाजकांची सरासरी

  (1+2+4+5+10+20)/6=42/6=7

  पूर्णांक असल्यामुळे 20 हे अरिथमॅटिक संख्या आहे. 42चे 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 विभाजक असून त्याची सरासरी (1+2+3+6+7+14+21+42 =96/8=12) पूर्णांक असल्यामुळे 42 अरिथमॅटिक संख्या आहे.

  काही सुरुवातीच्या अरिथमॅटिक संख्याः 1, 3, 5, 6, 7, 11, 13,14,15,17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 53, 54… इ.इ

- 42 या संख्येची ओळख admirable संख्या म्हणूनही आहे. admirable संख्येची व्याख्या अशी केली जातेः n ही admirable संख्या व त्याचे d1, d2, d3…dn विभाजक असल्यास एका विभाजकाची वजाबाकी इतर

विभाजकाच्या बेरजेतून n संख्या येत असल्यास त्या संख्येला admirable संख्या असे म्हणता येईल.
उदाः 12 चे विभाजक 1 , 2 , 3 , 4, 6 आहेत व या विभाजकांची मांडणी अशी करता येईलः 12 = 1 + 2 + 3 - 4 + 6;. त्याचप्रमाणे 42 चे विभाजक 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 आहेत व या विभाजकांची मांडणी अशी करता येईलः 42= 1+2+3-6+7+14+21
काही सुरुवातीच्या admirable संख्याः 12, 20, 24, 30, 40, 42, 54, 56, 66, … इ.इ

- धातूच्या एखाद्या पातळ पत्र्यावर 3x3 रकान्यात संख्या लिहून त्यात मंतरलेली शक्ती आहे असे एके काळी भासविले जात होते, गंमत म्हणजे ह्या संख्याची आडवी, उभी व तिरकी बेरीज केली तरी तीच संख्या येते. 42 ही संख्यासुद्धा अशीच एक मंतरलेली मॅजिक कॉन्स्टंट आहे व 3x3च्या रकान्यातून याची अशा प्रकारे मांडणी करता येतेः

17	10	15
12	14	16
13	18	11

हे सर्व गंमतीशीर असले तरी 42 ही संख्या सैद्धांतिक गणितीय अभ्यासकांच्या दृष्टीने फार महत्वाचे नाही असेच वाटत असावे. इतर कुठल्याही संख्येप्रमाणे 42सुद्धा एका आकड्यांची करामत असेल असेही वाटले असेल.

- काही संगणकतज्ञांना व गणितज्ञांना मात्र 42बद्दल जबरदस्त आकर्षण वाटत असावे. कारण अलीकडेच 3 घातांक असलेल्या 3 संख्यांची बेरीज करताना

अचानकपणे 42 ही संख्या सापडली. व या अभ्यासकांना 100च्या आतील संख्यामध्ये 42 ही संख्या जास्त 'त्रासदायक' आहे असे वाटू लागले.
3 घातांक असलेल्या $n = a^3 + b^3 + c^3$ या सूत्रात n पूर्णांक असून या n साठी a, b, c या संख्या कोणत्या असतील हा अभ्यासकांच्या समोरचा प्रश्न होता. घातांक 3 असलेले 3 संख्यांच्या गटामध्ये एखादी संख्या ऋण संख्या असू शकेल. 2 घातांक असलेल्या संख्यांच्या बेरजेच्या संख्यांपेक्षा 3 घातांक असलेल्या संख्यांची बेरीज असलेल्या संख्या जास्त प्रमाणात असतील. तुलनेने 2 घातांक असलेल्या 2 संख्यांच्या बेरजेत भरपूर मर्यादा आहेत.

2007 साली 156 या संख्येसाठी

156 = 26,577,110,807,5693 + (−18,161,093,358,005)3 + (−23,381,515,025,762)3

या संख्यांचा शोध लागला. यावरून अशा संख्या शोधणे अत्यत जिकिरीचे वाटत आहे.

उदाः $n = 1$ साठी $1^3 + 1^3 + (-1)^3 = 1$ असे लिहिता येईल.

किंवा $9^3 + (-6)^3 + (-8)^3 = 729 + (-216) + (-512) = 1$ असेही लिहिता येईल.

याचाच अर्थ एखाद्या *nसाठी अनेक प्रकारच्या तीन संख्या असलेले गट शोधता येतील.*

1936 साली कुर्ट माल्हेर या जर्मनीच्या गणितज्ञांने कुठल्याही *p या संख्येतून 1 साठी या सूत्राचा शोध लावलाः* $(9p4)^3 + (3p - 9p4)^3 + (1 - 9p3)^3 = 1$

त्याचप्रमाणे 2 साठी 1908मध्ये ए एस वेरेब्रुसोव्ह यानी या सूत्राचा वापर केलाः

$(6p^3 + 1)^3 + (1 - 6p^3)^3 + (-6p^2)^3 = 2$

यावरून 2च्या कुठल्याही 2 व 3 घातांक असलेल्या संख्येचा शोध घेऊ शकतो. उदाः 16 या 2च्या 3 घातांकाच्या दुप्पट असलेली संख्या $p = 1$च्या सूत्रावरून $14^3 + (-10)^3 + (-12)^3 = 16$ मांडता येईल.

2019मध्ये **3** या संख्येची मांडणी $1^3 + 1^3 + 1^3 = 3$;

$4^3 + 4^3 + (-5)^3 = 3$ अशा प्रकारे करण्यात आली.

या प्रकारच्या संख्यांच्या शोधासाठी गणितज्ञ संगणकांची मदत घेऊ लागले. 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16 ... या संख्येसाठी 3 घातांक असलेले गट शोधू लागले. 2000 साली हार्वर्ड विद्यापीठाचे नोम एल्कीस यानी यासंबंधी एक पद्धत शोधली होती. त्याचाच वापर करून जर्मनीचे Andreas-Stephan Elsenhans व Jörg Jahnel गणितज्ञ 1 ते 1000 यामधील संख्यांसाठी **3** घातांक असलेल्या (परंतु 1014 पेक्षा कमी असलेले) 3 संख्यांचा गट शोधू लागले. त्यांच्या मते 33, 42, 74, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, 975 या संख्याच फक्त या सूत्रात बसतात. 100 पेक्षा कमी असलेल्यात फक्त 33, 42, 74 या तीन संख्या आहेत.

2016मध्ये सँडर ह्युइसमन या नेदरलँड्सच्या गणितज्ञांने 74 साठी खालील प्रकारे मांडणी केलीः

$(-284{,}650{,}292{,}555{,}885)^3 + (66{,}229{,}832{,}190{,}556)^3 + (283{,}450{,}105{,}697{,}727)^3$

2019मध्ये ब्रिस्टॉल विद्यापीठाचे अँड्र्यू बुकर यानी 33 साठी $8{,}866{,}128{,}975{,}287{,}528)^3 + (-8{,}778{,}405{,}442{,}862{,}239)^3 + (-2{,}736{,}111{,}468{,}807{,}040)^3$ या संख्या शोधल्या.

2020मध्ये बुकर व एम आय टीचे अँड्र्यू सुदरलँड यांनी मिळून 42ची मांडणी

$$42 = (-80,538,738,812,075,974)^3 + (80,435,758,145,817,515)^3 + (12,602,123,297,335,631)^3$$

अशा प्रकारे केली.

165, 795 व 906 साठी अलिकडेच **3** घातांक असलेल्या संख्यांचे गट शोधण्यात गणितज्ञ यशस्वी झाले आहेत. व 1000 खालील 114, 390, 579, 627, 633, 732, 921 व 975 या संख्यांसाठी शोधकार्य चालू आहे.

डोग्लास ॲडम्सची 42 ही संख्या खरोखरच एकमेवाद्वितिय असल्यास अशा प्रकारे मांडणी करता आली नसती. तरीसुद्धा या संख्येभोवती अजूनही रहस्य वलय आहे असे म्हणण्यास भरपूर वाव आहे.

●●●

स्कूल ऑफ पायथॅगोरस

Numbers rule the world.

Pythagoras

भौतिकी, रसायनशास्त्र, वैद्यकशास्त्र या विज्ञान विषयातील अती महत्वाच्या उपयोजित संशोधनांच्या तज्ञांना 1901 सालापासून दर वर्षी लाखो डॉलर्ससकट नोबल पारितोषक देऊन सन्मानित केले जाते. परंतु गणित या विषयातील संशोधकांना मात्र या पारितोषकाच्या गडगंज पैशापासून वगळले जाते. कदाचित नोबल पारितोषकासाठी निधीची व्यवस्था केलेल्या स्विडन येथील आल्फेड् नोबल या उद्योजकाला गणिताविषयी (वा गणितज्ञाविषयी!) काही कारणामुळे घृणा असावी. त्याच्या मते गणित वा विज्ञानातील सैद्धांतिक संशोधन हे फक्त अमूर्त (वा निरुपयोगी) स्वरूपातील गोष्टी असून त्यापासून मानवी समाजाला उपयुक्त असे काही मिळणार नाही. तरीसुद्धा संगणक काळातील माहिती विस्फोटाकडे पाहिल्यास गणिताचा आवाका व त्याच्या व्याप्तीची नक्कीच कल्पना येऊ शकेल. गणिताच्या इतिहासात डोकावल्यास प्राचीन ग्रीक काळापासून, आजच्या अंत्यत आधुनिक काळापर्यंतच्या जगभरातील अर्थशास्त्रापासून अवकाश तंत्रज्ञानापर्यंतच्या सर्व समस्यांवर गणिताने आपली छाप उमटली आहे. विज्ञानाची स्वतंत्र अशी एक 'वैश्विक भाषा' म्हणूनच गणिताला आजसुद्धा फार महत्व आहे.

मानवी इतिहासाची पाने उलटत असताना मानवी उत्क्रांतीच्या काळापासून सुमारे तीन लाख वर्षापर्यंत या मानवी समूहाला जन्म-मृत्यु, आजारपण, ऊन-थंडी, वारा-पाऊस, पीकपाणीसारख्या कुठल्याही नैसर्गिक घटनांना वा भूकंप, वादळ, ज्वालामुखी, अतीवृष्टी-अनावृष्टी इत्यादी नैसर्गिक प्रकोपांना चमत्कारसदृश दैवीशक्तीच जबाबदार आहे, अशी समजूत होती हे लक्षात येते.

इ.स.पू. 6व्या शतकात मात्र प्राचीन ग्रीकमधील काही विचारवंत या नैसर्गिक घटनांच्या मागील सत्याचा तार्किकरित्या उलगडा करू लागले. बुद्धीच्या कसोटीवरून या घटनांकडे पाहत असताना विज्ञानाचा उदय झाला. स्कूल ऑफ पायथॅगोरस या नावाने ओळखले गेलेले पायथॅगोरस व त्याच्या शिष्यवर्गाने बौद्धिक चर्चेमधून काही गृहीतकांचा वेध घेतला व यातून अमूर्त गणिताचा पाया रचला गेला. इ.स.पू. 569 ते 475 दरम्यानच्या काळात पायथॅगोरस व त्यांच्या चमूने काही स्वयंसिद्धकं (axioms) व गृहीतकं (postulates) यांच्या आधारे निसर्गातील घटनांच्या मागील कार्य-कारण भावांचे वेध घेत घेत गणितशास्त्राला आकार देऊ लागले. खरे पाहता पायथॅगोरसच्या पूर्वीसुद्धा इजिप्त व मेसोपोटोमिया या देशात जमीनीची वाटणी, खरेदी-विक्री इत्यादीसारख्या व्यावहारिक समस्यांसाठी काही जुजबी नियम होते. कदाचित पायथॅगोरसला याबद्दलची माहिती त्याच्या तेथील वास्तव्यात मिळाली असेल व त्याच नियमांच्या आधारे भूमिती व अंकगणित यांच्या स्वरूपात पायथॅगोरसने या नियमांची पुनर्मांडणी केली असेल. ग्रीसमध्येही गणिताविषयी त्याकाळच्या विचारवंतामध्ये चर्चा घडत होत्या व काही नियमांची व गृहितकांची जुळणी केली जात होती. या स्वयंसिद्धकांचा वापर करून व तर्कशक्ती लढवून व्यावहारातील समस्यांना उत्तरं शोधत गणितशास्त्राची चौकट उभे करण्यात स्कूल ऑफ पायथॅगोरस यशस्वी झाली.

कलेसाठी कला याप्रमाणे गणितासाठी गणित असे त्याचे स्वरूप त्यानंतर न राहता सर्व ज्ञानशाखांचे मूलस्रोत म्हणून पायथॅगोरस व त्याचे स्कूल या ज्ञानशाखेकडे पाहू लागले. मुळात नैतिकतेच्या अधिष्ठानावर रचलेली एक आखीव-रेखीव, पक्की एकजूट असलेली ही पायथॅगोरियन कम्युनिटी होती. त्यांचे कपडे-लत्ते, आहार-विहारसारख्या सर्व दैनंदिन व्यवहारामधील

शिस्तबद्धता पायथॅगोरसने आखून दिलेल्या नियमांच्यावरच आधारित होत्या. कदाचित गणितप्रेमींचा पंथ असेच स्वरूप या कम्युनिटीला आले होते.

पायथॅगोरसच्या व्यतिरिक्तसुद्धा त्याच्या स्कूलच्या अनेकांनी गणिताच्या विकासाला हातभार लावला होता. ज्या काळात स्त्रियांना व्याख्यानं ऐकायलासुद्धा बंदी होती त्याकाळात त्याच्या अगदी जवळच्या 235 शिष्यांपैकी 17 महिला होत्या. अथेनियनच्या समकालीन महिलांप्रमाणे निमूटपणे पुरुषांच्या 'हो'ला 'हो' म्हणणाऱ्या त्या नव्हत्या तर या पायथॅगोरियन महिला प्रत्यक्ष चर्चेत भाग घेणाऱ्या होत्या. या महिलांनी केलेली टीका-टिप्पणी वा विनोदी शेरेबाजींचा उल्लेख नंतरच्या काळातील तत्ववेत्त्यानी केला आहे. त्या महिलांपैकी थिअॅनो (Theano) या महिलेचा गणित विषयासाठी दिलेले योगदान फार मोठा आहे.

तिने गणितातील π व e या अपरिमेय संख्यांच्या पङ्तीत बसणाऱ्या गोल्डन मीन वा गोल्डन रेश्यो या नावाने ओळखणाऱ्या φ या अपरिमेय संख्याची भर घातली. एका सरळ रेषेचे अ व ब (अ>ब>0) असे दोन भागात विभागणी करून (अ+ब)/अ हा गुणोत्तर अ/ब या गुणोत्तराशी जुळल्यास अ/ब या गुणोत्तरास गोल्डन रेश्यो या नावाने ओळखले जाते. या गुणोत्तरची किंमत जवळपास 1.61803339887..... असते.

गणितातील या गोल्डन रेश्योने गेली 2500 वर्षे अनेक गणितज्ञांना व तत्त्ववेत्त्यांना मोहून टाकले आहे. पायथॅगोरस, युक्लिड, लिओनार्डो दा व्हिन्सी, केप्लर यांच्यापासून अगदी अलीकडील रॉजर पेनरोझपर्यंत सर्व गणितज्ञांना गोल्डन रेश्योने भुरळ घातली आहे. सोळाव्या शतकातील केप्लर या खगोल-शास्त्रज्ञाच्या मते भूमितीमधील पायथॅगोरसच्या काटकोन-त्रिकोणासंबंधीच्या सिद्धांताइतकेच सुवर्ण गुणोत्तरही बहुमूल्य आहे. एका जर्मन मानसशास्त्रज्ञाने डोळ्यांना आल्हाददायक वाटणाऱ्या खिडक्या, फोटो, पत्रं, ग्रीटींग कार्ड्स,

आरसे, पुस्तकं, तैलचित्रं इत्यादी असंख्य गोष्टींच्या चौकटींचे मोजमाप गोल्डन रेश्योशी मिळते-जुळते आहेत हे लक्षात आणून दिले. कित्येक इजिप्टॉलॉजिस्ट्सना इजिप्शियन् पिरॅमिड्समध्येही अनेक ठिकाणी गोल्डन रेश्यो दिसले आहेत.

गोल्डन रेश्योव्यतिरिक्त थिॲनोने बहुभुज घनाकृतीच्या भुजा आणि त्यांचे कोनवरील काढलेले निष्कर्षसुद्धा वाखाणण्यासारखे आहेत. विशेषकरून 12 भुजं असलेली द्वादशपृष्टक (dodecahedron) घनाकृती अंकगणितातील विस्मयकारक आकृती अशी समजली जाते.

तिने भरपूर काही लेखनही केले होते परंतु ते कधीच प्रसिद्ध होऊ शकले नाही. तिला गणिताबरोबरच खगोलशास्त्र व वैद्यकशास्त्र व नीतीशास्त्र इत्यादीतही रुची होती.

थिॲनोचे पायथॅगोरसशी असलेल्या नातेसंबंधाबद्दल अनेक आख्यायिका आहेत. काहींच्या मते ती फक्त त्याची मैत्रिण होती तर काहींच्या मते ती त्याची पत्नी होती. काही अभ्यासकांच्या मते ती पायथॅगोरसचा शिष्य, ब्राँटिनोची मुलगी तर काहींच्या मते ती ब्राँटिनोची पत्नी होती. एका आख्यायिकानुसार ती खूप मन लावून गणित शिकवत असल्यामुळे त्याच्यापेक्षा ३४ वर्षांनी लहान असलेल्या थिॲनोच्या प्रेमात पायथॅगोरस पडला, त्यानी लग्न केलं व या जोडप्याला पाच मुलं झाली.

पायथॅगोरियन्सना संख्यांच्या वैशिष्ट्याविषयी जबरदस्त आकर्षण होते. त्यांच्या मते सर्व वस्तूंच्या रचनेत संख्या अती आवश्यक असतात. एकतारी वापरून केलेल्या प्रत्यक्ष प्रयोगातून संगीतातील विविध स्वर व आकाशातील ग्रह-ताऱ्यांचे भ्रमणदिशा व काल यांचे नेमके वर्णन हे गणिताद्वारे सप्रमाण सिद्ध करून ते दाखवू शकले.

संख्यांच्या स्वरूपावरून सम व विषम संख्या अशी विभागणी त्यांनी केली. त्यांना अपरिमेय संख्या माहित होत्या. त्यांना परफेक्ट संख्यांचा - ज्या संख्यांच्या विभाजकांची बेरीज त्या संख्येएवढी असते त्या संख्यांचा परिचय होता. उदाः 6=1+2+3 28=1+2+4+7+14 (इतर परफेक्ट संख्याः496, 8128, व 33550336...)

त्यांना फ्रेंड्ली संख्यांच्या जोडींची (अमिकेबल पेर्स) – एकमेकाच्या विभाजकांची बेरीज जुळत असलेल्या संख्यांच्या जोडींची - माहिती होती. उदाः 220 व 284 या फ्रेंड्ली संख्यांची जोड आहे. कारण 220 च्या 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 व110 या विभाजकांची बेरीज 284 होते व 284च्या 1, 2, 4, 71 व 142 या विभाजकांची बेरीज 220 होते. पहिले दहा मित्रसंख्यांच्या जोड्या असे आहेतः (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416), (63020, 76084), व (66928, 66992)

(आय इ डिक्सन या गणितज्ञाने मित्रसंख्यांच्या जोड्याप्रमाणे अमिकेबल ट्रिप्लेटची भर घातली. उदाः1980, 2016, 2556 या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये एका संख्याच्या विभाजकाची बेरीज उरलेल्या दोन संख्यांच्या बेरिजेएवढी असते.

2016 च्या विभाजकाची बेरीज 4536 असून उरलेल्या 1980+2556 = 4536 आहे.)

पायथॅगोरियन्सना प्रत्येक संख्येभोवती गूढ वलय असते व ते उकलणे गरजेचे आहे अशी भावना होती. त्यांना 1 ही मूळसंख्या असून सर्व सम संख्या पुरुष आहेत व सर्व विषम संख्या स्त्रिया आहेत असे वाटत होते. संख्यांच्यामुळेच मूळवस्तूंची स्थिती बदलते व वस्तूंच्या स्थिरता/अस्थिरतांचा शोध घेता येतो, याबद्दल त्यांचा ठाम विश्वास होता. संख्यांच्या मागील

चमत्कारांचा शोध घेण्याच्या या दृष्टीकोनामुळे ते वास्तवापासून दूर दूर गेले व त्यांच्या याच समजुतीमुळे पायथॅगोरियन्सची पुढील प्रगती खुंटली. वास्तव केवळ पूर्णांक वा अपूर्णांकातून समजून घेता येत नसून त्यासाठी आणखी काही तरी हवी याची जाणीव नंतरच्या काळात झाली. वर्तुळाचे गूढ उकलताना पूर्णांक व अपूर्णांकासारखे आणखी काही गुंतागुंतीच्या, समजण्याच्या पलिकडच्या चक्राकार अंकांची श्रेणी न देऊ शकणाऱ्या (π सारखे) इरॅशनल (अपरिमेय) संख्या अस्तित्वात असू शकतात, हे त्यांच्या लक्षात आले. या अपरिमेय संख्यामुळे त्यांना वास्तवाचे भान आले व हे जग ते समजत होते तितके साधे, सरळ नसून भरपूर गुंतागुंतीचे आहे याची त्यांना जाणीव झाली.

●●●

पृथ्वीलाच कवेत घेणारा इरेटॉस्थेनिझ

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty—a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show ...

Bertrand Russell

God created the integers and all else is man's work.

Cronicker

चार – पाचशे वर्षांपूर्वी दूरपल्ल्याचा समुद्रप्रवास फक्त साहस म्हणून न राहता जग जिंकण्यासाठी वा व्यापार-उद्योगासाठी केलेला रोमांचकारी अनुभवासाठी होता. त्याकाळचे राज्यकर्त्येसुद्धा त्याला भरपूर प्रोत्साहन देत होते. आर्थिक मदत करत होते. यात ब्रिटिश, फ्रेंच, डच, पोर्तुगीज, स्पॅनिश इत्यादी युरोपियन्स आघाडीवर होते. नंतरच्या काळात यांच्याच राज्यकर्त्यांनी एशिया, आफ्रिका, अमेरिका व आस्ट्रेलिया खंडातील बहुतेक देशात वसाहती उभ्या केल्या व त्या देशातील लोकांचे शोषण करत स्वतःच्या साम्राज्यवादाची भूक मिटवून घेतली. अशाच छंदापायी 1500च्या सुमारास समुद्रमार्गे मसाल्याची बेटं शोधण्याच्या मोहिमेला निघालेले मॅगेलान व एल्कॅनो या स्पॅनिश नाविकांना पृथ्वी प्रद क्षिणेसाठी सुमारे चार वर्षे लागले व पृथ्वी सपाट नसून गोल आहे या कटुसत्याचा शोध लागला. परंतु त्याच्याही अगोदर 1300 वर्षांपूर्वी इरेटॉस्थेनिझ या सर्वज्ञाने अलेक्झांड्रियाच्या लायब्ररीत बसूनच याचा नीटसा अंदाज केला होता. एवढेच नव्हे तर गणिती पद्धत वापरून पृथ्वीच्या व्यासाचे अचूक अंतरही त्यांनी शोधून काढले होते.

गणितातील ग्रीक विचारवंतांचे प्राविण्यच अशा अशक्यप्राय पृथ्वीलाच कवेत घेऊ शकणारे मोजमाप करू शकते, असे म्हटल्यास वावगे ठरणार नाही.

इरेटॉस्थेनिझ चा (इ. स. पू. 276 – 194) जन्म आताच्या आधुनिक लिबिया येथील सायरिन (Cyrene) येथे झाला व त्याच्या वयाच्या 40व्या वर्षी तो त्या काळात अत्यंत नावाजलेल्या अलेक्झांड्रिया लायब्ररीचा मुख्य ग्रंथपाल झाला. काव्य, तत्वज्ञान, गणित, खगोलशास्त्र, इतिहास व भूगोल या विषयात तो तज्ञ असल्यामुळे त्याला बहुआयामी गणितज्ञ (polymath) असे म्हटले जात असावे. त्यांनी एखाद्या मोठ्या नैसर्गिक संख्येपर्यंतच्या सर्व अविभाज्य संख्या शोधण्याची व त्यातील सर्व अपरिमेय संख्या वेगळे करण्याची एक सोपी आणि प्रभावी पद्धत सांगितली. तिला 'इरेटॉस्थेनिझची चाळणी' असे म्हणतात. अविभाज्य संख्या शोधण्याच्या विविध पद्धतींपैकी ही एक सोपी आणि प्रभावी पद्धत असून तिचा वापर अजूनही केला जातो. त्याचप्रमाणे परिघ काढण्याची अगदी सोपी रीत वापरून पृथ्वीच्या परिघाचा अचूक अंदाज तो घेऊ शकला. आतासुद्धा आपण परिघ काढण्याची तीच रीत शाळेत शिकत असतो.

पृथ्वीचा परिघ मोजण्यासाठी इरेटॉस्थेनिझ यांनी वापरलेली पद्धत त्यांच्या गणिती बुद्धिमत्तेची आणि कल्पकतेची साक्ष देते. उन्हाळयातल्या सर्वांत मोठ्या दिवशी इजिप्तमधल्या सिएने (Syene) इथे दुपारी एका विहिरीत सूर्याचे प्रतिबिंब थेट पाण्यात दिसते ही माहिती त्यांना कळली. याचा अर्थ त्यावेळी सूर्यकिरण सिएने येथे लंबरूप असतात हे इरेटॉस्थेनिझ यांनी ओळखले. त्याच दिवशी दुपारी अलेक्झेंड्रिया इथे सूर्यकिरणाचा एका खांबाशी होणारा पतनकोन त्यांनी मोजला (7.2°). तो पूर्ण वर्तुळाच्या (360/7.2 =) 5° व्या भागाइतका भरला. सूर्यकिरण एकमेकांना समांतर असतात आणि पृथ्वी गोल आहे असे मानून भूमितीचे नियम वापरून किरणांचा अलेक्झांड्रियातील खांबाशी होणारा

कोन आणि सिएने येथील विहीर व अलेक्झेंड्रियातील खांब या दोन ठिकाणांना पृथ्वीमध्याशी जोडणाऱ्या त्रिज्यांमधला कोन हा सारखाच असला पाहिजे हे त्यांनी प्रतिपादित केले.

एक उंट रोज शंभर स्टेडिया चालू शकतो. सिएने ते अलेक्झांड्रिया हे अंतर चालण्यासाठी उंटाला 50 दिवस लागतात. यावरून सिएने आणि अलेक्झेंड्रिया यातले अंतर 5000 स्टेडिया (stadia) होते. पूर्ण वर्तुळाच्या 50व्या हिश्श्यात परिघावर समावलेले अंतर 5000 स्टेडिया असेल तर संपूर्ण परीघ 50x5000 =250000 स्टेडिया असणार असे गणित इरेटॉस्थेनिझ यांनी मांडले. या गणिताची अचूकता अर्थातच एक स्टेडियम (stadium) म्हणजे किती किलोमीटर या सूत्रावर अवलंबून आहे. जर स्टेडियमचे अंतर इजिप्शियन स्टेडियमशी जुळत असल्यास एक स्टेडियम म्हणजे 157.5 मीटर्स असू शकते. या हिशोबाप्रमाणे 5000 स्टेडिया म्हणजे 787.5 किमी व त्यावरून परिघ काढल्यास पृथ्वीचे परिघ (50x787.5 =) 39375 किमी असेल. सॅटलाइट व जिओलोकेशन पद्धत वापरून सेंटीमीटरपर्यंत मोजले तरी पृथ्वीचे विषुववृत्तावरील परिघ 40075 किमी आहे. जरी इरेटॉस्थेनसचे काही गृहतके – पृथ्वी पूर्णपणे गोल नसेल, सूर्य किरण लंबकोन करून पडत नसतील वा सिएने शहर विषुववृत्तावर नसेल, इ.इ.- त्याचे हे पृथ्वी व सूर्यमालिकेचे प्रारूप आधुनिक प्रारूपाशी तंतोतंत जुळणारी आहे.

या स्टेडियाच्या अचूक मोजमापाबद्दल तज्ज्ञांमध्ये थोडी मतभिन्नता आहे, पण तज्ज्ञांनी सुचवलेला कुठलाही अंदाज मान्य केला तरी इरेटॉस्थेनिझ यांनी मांडलेली किंमत ही आज माहित असलेल्या पृथ्वीच्या परिघाच्या अचूक किंमतीच्या बरीच जवळ जाणारी आहे. पृथ्वी सपाट नसून गोल आहे, हेसुद्धा त्यानी अप्रत्यक्षपणे यातून सिद्ध करून दाखविले. पृथ्वी सपाट असल्यास

अलेक्झांड्रिया व सिएने येथे सूर्यकिरणांच्या लंबकोनामुळे तेथे कुठल्याही प्रकारची सावली दिसली नसती.

पृथ्वीचा आकार आणि परिघ समजल्यावर इरेटॉस्थेनिझ यांनी पृथ्वीचा नकाशा बनवण्याचे काम हाती घेतले. अलेक्झेंड्रियाच्या ग्रंथालयात प्रवासवर्णनाची अनेक पुस्तके उपलब्ध होती. त्यातली माहिती एकत्रित करून , पडताळून त्यांनी जिओग्रोफिका ('Geographika') या ग्रंथात त्याचे सुसूत्र संकलन केले. या ग्रंथाचे तीन खंड त्यांनी लिहीले. त्यावेळी ज्ञात असलेल्या सर्व भूखंडांचा नकाशा या ग्रंथात दिला होता. हा पृथ्वीचा प्रथम नकाशा मानला जातो. या ग्रंथामुळे इरेटॉस्थेनिझ यांना भूगोल विषयाचा जनक म्हटले जाते. दुर्दैवाने आज हा ग्रंथ उपलब्ध नाही, परंतु नंतरचे संशोधक आणि इतिहासकार यांच्या ग्रंथातून जिओग्रोफिकाचे अनेक संदर्भ मिळतात.

इरेटॉस्थेनस आणि आर्किमिडीस (Archimedes) हे चांगले मित्र होते. आर्किमिडीसप्रमाणे त्यांनाही वेगवेगळी यंत्रे, उपकरणे बनवायला आवडे. आर्किमिडीजने आपले 'द मेथड' हे पुस्तक इरेटॉस्थेनिझला अर्पण केले आहे. दिलेल्या घनाकार ठोकळयाच्या दुप्पट घनाकार बनवण्याचा गणिती कूटप्रश्न सोडवण्यासाठी इरेटॉस्थेनिझ यांनी एक यांत्रिक उपकरण बनवले होते. त्या उपकरणाला त्यांनी मेसोलॅबिओ (mesolabio) असे नाव दिले.

दिनदर्शिका बनवण्याचेही काम इरेटॉस्थेनिझ यांनी हातात घेतले. लीप वर्षाची तरतूद त्यांनी त्या दिनदर्शिकेत केली हे विशेष. साहित्यविषयक आणि राजकीय अशा महत्त्वाच्या प्रसंगांची काललेखी बनवण्यासाठी त्यांनी या दिनदर्शिकेचा वापर केला. 675 ताऱ्यांच्या नोंदी असणारी यादी सुद्धा त्यांनी बनवली.

या बहुआयामी गणितज्ज्ञाने विज्ञानासाठी केलेल्या योगदानाच्या सन्मानार्थ चंद्रावरील एका विवरला आणि चंद्राचा इतिहास ज्या पाच कालखंडात

विभागला गेला आहे, त्यातील दुसऱ्या कालखंडाला इरेटॉस्थेनिझ याचे नाव दिले गेले आहे.

कुठल्या तंत्रज्ञानाचा मागमूस नसूनही त्याच्या पूर्वीच्या थेल्स, पायथॅगोरस, अर्किमिडिस, युक्लिड, इत्यादींनी विकसित केलेले गणित व स्वतःची गणिती बुद्धीमत्ता वापरून ग्रीस येथील कित्येक बुद्धीवंतानी पृथ्वीपासून सूर्याचे अंतर, ग्रहणकाल वा ग्रहांच्या चलनाची माहिती इत्यादी गोष्टी शोधून काढल्या होत्या, एवढेच नव्हे तर पृथ्वी विश्वाच्या केंद्रस्थानी नसून सूर्याभोवती पृथ्वीसारखे ग्रह फिरतात याचाही अंदाज एका ग्रीक तज्ञाने वर्तविला होता. कुठल्याही प्रकारचे प्रत्यक्ष प्रयोग न करता केवळ सैद्धांतिकरित्या अशा गोष्टींची मांडणी करत वैज्ञानिक ज्ञानाचा पाया या गणितज्ञाने रचला होता. याच वैज्ञानिक पद्धतीतून ज्ञात नसलेल्या कित्येक गोष्टींचे ज्ञान आपल्याला मिळू लागले.

●●●

तंत्रज्ञानविश्वात क्रांती घडविणारा फोरियर

Fourier's Theorem ... is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but it may be said to furnish an indispensable instrument in the treatment of nearly every recondite question in modern physics. To mention only sonorous vibrations, the propagation of electric signals along a telegraph wire, and the conduction of heat by the earth's crust, as subjects in their generality intractable without it, is to give but a feeble idea of its importance.

— Baron William Thomson Kelvin

अनेक गणितज्ञ गणिताकडे एक कलाकृती म्हणून बघत असतात. त्यांच्या दृष्टीने गणित ही एक शिल्पकृती असून तिच्या सौंदर्याकडे बघतच रहावे व आनंद लुटावा असेच त्यांना वाटत असते. त्यांनी शोधलेल्या संख्यांच्या विविधतेत व संख्यासाठी वापरलेल्या सूत्रांमध्ये एक अदृश्य बळ असू शकते हे कदाचित गणितज्ञांनाही माहित नसेल. परंतु काही तंत्रज्ञ मात्र गणिताच्या उपयुक्ततेवर लक्ष ठेऊन असतात. तंत्रज्ञ त्यांचा वापर करून नवीन तंत्रज्ञान विकसित करू शकतात.

नेपोलियन बोनापार्टच्या युद्धविषयक सल्लागार म्हणून काम करत असलेल्या फोरियरने त्याच्या न कळत गणिती सूत्रांचा फार मोठा ठेवा मागे ठेवला आहे. याच्याच गणिती पद्धतीमुळे विसाव्या शतकात वैद्यकीय व संपर्क तंत्रज्ञानात क्रांती झाली असे म्हणावयास वाव आहे. mathematical physics या शास्त्राला नवे परिमाण देण्यात फोरियरचा फार मोठा वाटा आहे.

जीन-बाप्टिस्ट जोसेफ फोरियर (1768-1830) लॅग्रांज व लॅप्लास या थोर गणितज्ञांचा समकालीन व घनिष्ठ मित्र होता. लहानपणी अनाथ झाल्यामुळे तो

चर्चच्या परिसरात पाद्रींच्या देखरेखीखाली वाढला. खरे पाहता तो एखाद्या चर्चमध्ये पाद्री होऊन आकाशातल्या बापाची सेवा करत आयुष्य घालवू शकला असता. परंतु गणिताचे वेड त्याला स्वस्थ बसू देत नव्हते. तो पॅरिसच्या पॉलिटेक्निक युनिव्हर्सिटीत प्राध्यापक होता. त्याला राजकारणात अभिरुची होती. फ्रेंच राज्यक्रांतीचा उघड पुरस्कर्ता होता. त्याला सैन्यात अधिकारी व्हावेसे वाटत होते. परंतु त्याकाळच्या पद्धतीप्रमाणे शिंपी, कुंभार, लोहार इत्यादी खालच्या वर्गातील मुलांना सैन्यात भरती होता नसे. परंतु राज्य क्रांतीनंतर नेपोलियनने ही बंदी उठवल्यामुळे त्याला सैन्याधिकारी होता आले.

१७९३च्या क्रांतीनंतरच्या रक्तपातात हासुद्धा भाग घेतल्यामुळे त्याच्यावर खटलाही भरला गेला. खरे पाहता क्रांतीच्या कल्पनेने तो भारावून गेला होता व एखाद्या देशातील ही घटना फारच कौतुकास्पद आहे असे त्याला मनापासून वाटत होते. जरी फोरियर सामान्य माणसांचे दुःख समजून घेत असला तरी त्यासाठी रक्ताचे पाट वाहणे त्याला पसंत नव्हते. त्यामुळे जेव्हा नेपोलियनने शिक्षण संस्थेच्या जबाबदारीची प्रस्ताव ठेवल्यावर फोरियरने ताबडतोब होकार देऊन ती जबाबदारी स्वीकारली. 1798 मध्ये नेपोलियन बोनापार्टेबरोबर इजिप्तच्या स्वारीत तो सहभागी झाला होता. इजिप्तहून परतल्यानंतर सम्राट नेपोलियनने त्याला गव्हर्नरपद बहाल केले. 1802 नंतरचा हा काळ वैज्ञानिकदृष्ट्या त्याला फारच फलदायी ठरला. याच काळात गणित विषयातील त्याची प्रगती अप्रतिम होती. 1807 मध्ये त्यानी जड वस्तुंमधील उष्णतेच्या प्रसरण क्रियेबद्दल (On the Propagation of Heat in Solid Bodies) शोधनिबंध लिहिला. उष्णतेच्या संतुलनाविषयीचे सूत्र त्यानी शोधले.

त्या काळच्या वैज्ञानिकांना कुठल्याही गोष्टींच्या अगदी मुळापर्यंत जाण्याचे अक्षरशः वेड लागलेले असावे. जीन-बाप्टिस्ट जोसेफ फोरियरही याला

अपवाद नव्हता. उष्णता निरोधक आवरणात प्रत्येक क्षणा-क्षणाला व प्रत्येक बिंदूवरील तापमान किती असू शकते या प्रश्नाने त्याला जंग जंग पछाडले होते. शक्तींची अक्षय्यता, (conservation of energy), विशिष्ट उष्णता (specific heat) व उष्णीय वाहकता (thermal conductivity) यांच्या आधारे फोरियरने डिफरन्शियल कॅल्क्युलस वापरून तापमानांच्यातील नियंत्रणाबद्दलच्या मूलभूत समीकरणांची रचना केली.

परंतु या संशोधनांपेक्षा त्यानी फंक्शन्सच्या स्वरूपाविषयी काही मूलभूत संशोधन केले व हेच संशोधन त्याला प्रसिद्धीच्या झोतात झळकविले. दोन परिमाणांचा परस्पर संबंध दर्शविणाऱ्या समीकरणात चल किंवा अचल परिमाण हे दुसऱ्याचे फल (function) असते. उदाहरणार्थः y= φ(x) यात y हे x चे फल आहे. किंवा x= ф(y) यात x हे y चे फल आहे. यात एक स्वचल असून दुसरे परचल आहे.

महत्वाचे म्हणजे या समीकरणांचे मुख्य गुणधर्म रेषीय (linear) आहेत. आपल्याला एक उत्तर मिळाल्यास त्यातून आपल्याला अनेक उत्तरं फक्त साधे गुणाकार करून नव्या समीकरणातून शोधता येते. त्यातील वारंवारता व आवर्तिता (periodicity) याच कल्पनेचा वापर करून सर्व फंक्शन्संना बेरजेच्या वा पूर्णांकांच्या (integral) वा त्रिकोणमितीय फंक्शनच्या (trigonometric) स्वरूपात मांडता येऊ शकते, हे सूत्ररूपाने त्यांनी सिद्ध करून दाखविले. तेव्हा आपण फोरियरचीच कल्पना वापरत असतो. वैद्यकीय चाचणीतील सीटी स्कॅन वा कॅट स्कॅन (CT or CAT scans) मधील विरलीकरणाच्या जवळ पासच्या क्ष किरणांची तीव्रतेत वाढ केली जाते तेव्हासुद्धा फोरियरची पद्धतच उपयोगात आणली जाते. संगीतातील इक्वलायझरसाठी, भूपृष्ठावर कंपने केव्हा घडतात, कोठे आणि किती खोलीवर वाहतात व त्याची तीव्रता किती असते इत्यादींची मोजमाप करणाऱ्या सीस्मोग्राफच्या संचाच्या

रचनेसाठी फोरियरची पद्धतच वापरली जाते. त्यामुळेच संगीताच्या स्वादात भर पडते; भूकंपाचा अंदाज अचूकपणे सांगता येऊ शकते. स्फटिकातील अंतर्गत रचना समजून घेण्यासाठी त्यावरील विवर्तन किरणांच्या (diffraction of rays) विशेलेषणासाठीसुद्धा फोरियरचीच पद्धत उपयोगात येते.

फ्रेंच अकॅडेमी ऑफ सायन्सेसनी 1812मध्ये त्याच्या या कल्पनेसाठी पारितोषक देऊन गौरव केले तरी त्याकाळचे कित्येक तज्ञ त्याच्या या कल्पनेवर विश्वास ठेवण्यास तयार नव्हते. मुळात त्याकाळी डिफरन्शियल कॅल्क्युलस अजून प्राथमिक अवस्थेत होते. त्यामुळे फोरियरच्या पद्धतीचे स्वप्न पूर्ण होण्यासाठी विसाव्या शतकाची वाट पहावी लागली. त्याला मुख्य आधार देण्यासाठीची लेबेस्गच्या मापन सिद्धांताचा (Lebesgue Measure Theory) शोध विसाव्या शतकात लागला व फोरियरच्या पद्धतीला पुष्टी मिळाली. नंतरच्या काळात फोरियरचा सिद्धांत वर्तुळातील जाळीप्रमाणे पसरलेल्या प्रत्येक बिंदूंच्या स्वरूपासारख्या केवळ गणितज्ञानाच विशेष रुची असलेल्यापर्यंत मर्यादित न राहता वा केवळ गणितीय वा संख्या सिद्धांतात अडकून न पडता हेसेन्बर्गच्या क्वांटम सिद्धांतापर्यंत फोरियर विश्लेषणातून (Fourier analysis, also called harmonic analysis) त्याची व्याप्ती वाढविणे शक्य झाले. फोरियरला त्याच्या कल्पनेमुळे एवढ्या मोठ्या प्रमाणात तंत्रज्ञान विकसित होईल, हे बघता आले नाही. फोरियरच्या स्वाभाविकरित्या सुचलेल्या या गणिती पद्धतीतून जगाचे स्वरूपच बदलून टाकणारे एक अमूल्य साधन जगाला मिळाले.

●●●

गणितविश्वातील महान क्रांतीकारक: आयझॅक न्यूटन

I do not frame hypothesis.

Issac Newton

17व्या शतकातील युरोपमध्ये नुकतेच जागतिकीकरणाचे वारे वाहत होते. दूर दूर पसरलेल्या वसाहती देशाबरोबरच्या व्यापारासाठी जहाजांचा वापर केला जात होता. युरोपमधील समुद्रकिनारी असलेली शहरं आंतरराष्ट्रीय व्यापाराचे नियंत्रण करत होते. याच बंदरामधून जहाजावर मालांची चढ - उतार मोठ्या प्रमाणात होत होती. अशाच वेळी केव्हातरी माल व प्रवाश्याबरोबर उंदीरही जहाजात घुसले. उंदीराबरोबर प्लेगचे विषाणूही घुसले. व जगभर जीवघेण्या प्लेगची साथ पसरली. बंदरावर उतरलेल्या प्रवाशाबरोबर हे ब्युबॉनिक प्लेगचे विषाणू इतरांच्या शरीरात प्रवेश करू लागले. पहिल्या आठवड्यात एका-दोघांच्या मृत्युची नोंद झाली. त्याच्या पुढच्या आठवड्यात हा आकडा शंभरापेक्षा जास्त झाला. महिन्याभरात हजारो मृत झाले. लंडनमध्ये त्या थोड्याशा अवधीत या साथीच्या रोगामुळे २०-३० टक्के जनसंख्येला प्राणास मुकावे लागले. लोकांना घराबाहेर पडण्यास बंदी घालण्यात आली. शाळा-कॉलेज ओस पडले. केंब्रिज विद्यापीठात शिकत असलेल्या 23 वर्षाच्या तरुण न्यूटनला त्याच्या वूल्सथॉर्प या जन्मगावी परतावे लागले.

1642च्या क्रिसमस सणाच्या दिवशी इंग्लंडमधील एका खेडयात जन्मलेला न्यूटन जन्माआधीच पोरका झाला होता. काहीसा एकलकोंडा व अशक्त प्रकृतीचा न्यूटन काहीना काही विचार करत असे. त्याचा मेंदू हीच त्याची प्रयोगशाळा. त्याच्या कुटुंबियांच्या शेतातील सफरचंदाच्या

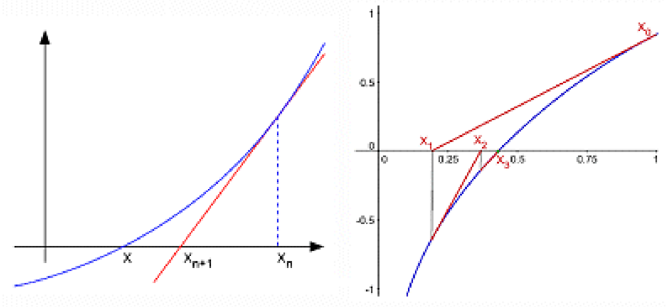
झाडाखाली एकटाच बसून तो आपल्या विचारात गुंग होत वेळ घालवत होता. याच विश्रांतीच्या काळात न्यूटनने आपल्या प्रतिभाशक्तीने जगाला आश्चर्यचकित करून टाकणाऱ्या कित्येक नवीन नवीन कल्पनांची मांडणी केली. त्यांनी आपल्या कुशाग्र बुद्धीच्या बळावर भौतिकी आणि गणित क्षेत्रांत महान ख्याती प्राप्त केली.

या अज्ञातवासाच्या काळात स्वतःच्या अभ्यासासाठी त्यानी स्वतःचीच पुस्तकसंग्रहाची व्यवस्था केली. नोंदीसाठी हजार पानांचे एक नोटबुक शिवून घेतले. स्वतः वाचलेल्या गोष्टींची तो नोंद ठेऊ लागला. संशोधन पद्धतीतून त्याचा अभ्यास चालू होता. स्वतःच एखादी समस्या उपस्थित करत होता. त्या अनुषंगाने उत्तरं तो शोधत होता. पुन्हा प्रश्न-उपप्रश्न विचारत तो उत्तरं शोधत होता. अशा प्रकारे त्याचे संशोधन या प्लेगच्या साथीच्या काळात अखंडपणे चालू होते. आपण संशोधन करत आहोत याची किंचितशी कल्पना त्याला त्याकाळी कदाचित नसेल. एकटाच एकांतात, कुणाबरोबरही संवाद न करता त्याचे हे संशोधन चालू होते व बघता बघता गणितातील अनेक विषयावर मूलभूत टिप्पणी करून गणित, भोतिकी, खगोलशास्त्र इत्यादीत मोठ्या प्रमाणात भर घातली.

1665 व 1666 या दोन वर्षाच्या एकांताच्या कालावधीत स्वत:च्या प्रतिभाशक्तीने त्यानी नैसर्गिक सत्याचा पाठपुरावा केला. प्रकाशाचे स्वरूप काय असू शकेल, झाडावरील फळं जमीनीवर का पडतात, आकाशातील ग्रह-ताऱ्यांचे भ्रमण कशामुळे होते, इत्यादी नैसर्गिक घटनामागील सत्य जाणून घेण्यासाठी तो सतत विचार करत असे. आयझॅक न्यूटन यांना गणित विषयाप्रती खूप गोडी असल्याने त्यांनी या विषयाला अनुसरून विविध शाखांमध्ये प्राविण्य मिळविले. न्यूटन यांच्या आधी गणित क्षेत्रांत प्रसिद्धी मिळवणारे महान वैज्ञानिक पास्कल यांनी मांडलेल्या विचारांच्या आधारे

त्यांनी सर्वकष स्वरूपातील बायनॉमियलचा सिद्धांत मांडला. या सिद्धांताच्या साह्याने दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग, आणि घन त्याचप्रमाणे घातांकाचे मूल्य सहज काढता येते.

या विचारामंथनाचे फलित म्हणजे त्यानी शोधलेले गुरुत्वाकर्षणासंबंधीचे व गतीसंबंधीचे ते प्रसिध्द नियम. प्रकाशिकी (optics), गुरुत्व शक्ती, गती नियम इत्यादींच्या बरोबरच गणितातील अत्यंत महत्वाटे समजलेल्या डिफरन्शियल व इंटिग्रल कॅल्क्युलसचा (differential and integral calculus) शोध न्यूटनने लावला. विसाव्या शतकातील तंत्रज्ञानाच्या विकासासाठी तरुण न्यूटनने शोधलेल्या गणितातील या दोन गोष्टी फारच उपयुक्त ठरल्या.



गणिती जगात इन्फायनेटेसिमल कॅल्क्युलस (Infinitesimal calculus) या नावाने ओळखले जाणाऱ्या या गणिती साधनांच्या सहायाने आधुनिक संशोधक ढगांचे चलन, समुद्राच्या लाटांचे ओहोटी-भरती, अवकाशातील ग्रह-ताऱ्यांचे भ्रमण, उपग्रहांचे नियंत्रण, साथीच्या रोगांचा प्रसार, वाहनांची रचना अशा अनेक गोष्टींचा अभ्यास करू शकले. आधुनिक अर्थव्यवस्थाच गणितातील या शोधामुळे उभी आहे, असे म्हटल्यास अतिशयोक्ती ठरणार नाही.

जग आहे तशी कल्पना करत त्या कल्पनांना गणितीय भाषेमध्ये मांडण्याचा त्यानी प्रयत्न केला. तार्किक मांडणी व आवश्यक पुराव्यांची जोड त्यांना दिली. नैसर्गिक घडामोडींचा विचार करताना काही गृहितकांची कल्पना करावी लागते. गृहितकांची सत्यासत्यता तपासावी लागते. अपवादांचा मागोवा घ्यावा लागतो. त्यातून सूत्रबध्दता आकार घेऊ लागते. त्यातून नियमांची मांडणी करता येते.

डेरिव्हेटिव्ह (चलाच्या संदर्भात फलामध्ये घडणाऱ्या बदलाचा तात्कालिक दरः अनुपात – derivative) व इंटिग्रल या त्याच्या संकल्पनेमुळे गणिती जगतात अक्षरशः क्रांती घडली. वेग व प्रवेग आणि त्यांचे वेळेशी असलेल्या संबंधाशी डेरिव्हेटिव्ह संकल्पना जोडण्यात न्यूटन यशस्वी झाला. क्षणोक्षणी होत असलेल्या बदलाचा वेध या संकल्पनेमुळे घेता आले. भूमितीत वक्ररेषेचे (curve) उतार (slope) काढण्यासाठी याचा उपयोग होऊ शकतो. या उतारावरून स्पर्षरेषा (tangent) काढणे सुलभ झाले.

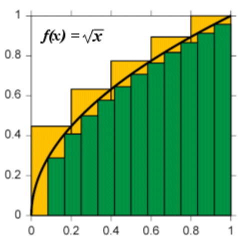
तद्विरुद्ध इंटिग्रलवरून वस्तूंचे क्षेत्रफळ, घनफळ वा गुरुत्वबिंदू काढता येऊ लागले. गंमत म्हणजे या दोन्ही संकल्पना गणितातील इन्फायनेटेसिमल कॅल्क्युलस या एका सुंदर सूत्राशी निगडित आहेत. एखाद्या नाण्याच्या दोन बाजूसारखे या संकल्पनेच्या एका बाजूला डेरिव्हेशन व दुसऱ्या बाजूला इंटिग्रेशन आहेत. अशा प्रकारे हे सूत्र वापरून डेरिव्हेशन नंतर इंटिग्रेशन वा इंटिग्रेशन नंतर डेरिव्हेशन यशस्वीपणे काढता येते.

1669मध्ये न्यूटनने डिफरन्शियल कॅल्क्युलसची संकल्पना विषद करणाऱ्या De analysi per aequationes numero infinorum terminorum,या शोधनिबंधाची हस्तप्रत इझ्याक बारो या त्याच्या गुरुस्थानी असलेल्या शिक्षकाकडे सुपूर्द केली. कदाचित जगातच पहिल्यांदाच डिफरन्शियल कॅल्क्युलसचा उल्लेख होत असावा. या निबंधात समीकरणं

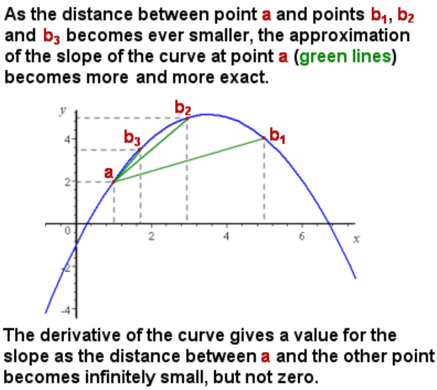
कशा प्रकारे सोडवता येतील याबद्दलची माहिती होती. यालाच न्यूटन-रॅफ्सन पद्धत म्हणून ओळखले जाते. या पद्धतीतून पॅराबोलाचे क्षेत्रफळ अचूकपणे काढणे शक्य झाले. न्यूटनपूर्वी जॉन वॅलेस (1616-1703) यानी यासाठी एक पद्धत शोधली होती. परंतु न्यूटनची ही फ्लुक्सियन्स पद्धत (method of fluxions) अत्यंत सुलभ व सुटसुटित होती.

न्यूटनच्या स्पर्षरेषेबद्दलच्या संकल्पना इन्फायनेटेसिमल कॅल्क्युलसशी व क्षेत्रफळाबद्दलच्या संकल्पना इंटिग्रलशी जोडलेले असले तरी प्रत्यक्ष व्यवहारात त्या एकमेकाशी व्यस्त प्रमाणात होत्या. न्यूटनचा याविषयीचा शोध निबंध, De methodis serierum et fluxionum, त्याच्या मृत्युपश्चात १७३६मध्ये प्रकाशित झाला. यात त्यानी पहिल्यांदाच वेळेचे मापन म्हणून फ्ल्यूएंट्स (fluents) व वेगाचे मापन म्हणून वेळेशी संबंधित डेरिव्हेटिव्हची फ्लुक्सियॉन (fluxions) या संकल्पनांची मांडणी केली होती. त्याचबरोबर.

The area under a curve can be approximated by summing the area of a number of rectangles or slabs drawn within it. The greater the number of rectangles used (the thinner the slabs) the more accurate the approximation. So, the green area below is a better approximation that the yellow. Integration gives an area based on an infinite number of slabs, and so approaches the exact area.



फ्लुक्सियॉनच्या गणनासाठी त्यानी अल्गॉरिदम्ससुद्धा लिहिलेले होते. आजही आपण क़ॉलेजमध्ये पहिल्या वर्षी शिकत असताना कॅल्क्युलसची



बेरीज, गुणाकार, भागाकार करण्यासाठी याच अल्गॉरिदम्सचा वापर करत असतो.

त्यानी वक्ररेषेखालील क्षेत्रफळ कसे काढावे, याची पद्धतही त्यात विषद केली होती. त्यानी मांडलेल्या फ्ल्यूएंट्स पासून फ्लुक्सियॉन काढण्याच्या रीतीला आता आपण the primitive of a function म्हणतो. न्यूटनपूर्वी इटलीतील बोनाव्हेंच्युरा कॅव्हिलियरी व इव्हांजिलिस्टा टोरिसेल्ली, फ्रान्स येथील रेने देकार्ते व पियरे डि फेर्मा सारख्या अनेक गणितज्ञ/वैज्ञानिकांनी एखाद्या वक्राकृतीचे कमाल (maximum) व किमान (minimum) घटक काय असू शकतात या भौतिकीतील समस्येवर तोडगा काढण्याचे प्रयत्न केले होते. परंतु म्हणावे तसे यश त्यांना मिळाले नव्हते. परंतु न्यूटनच्या नवीन कॅल्क्युलसच्या सोप्या पद्धतीमुळे या समस्येला उत्तर मिळाले.

त्यानी मांडलेले अवकलन व समाकलन (डेरिव्हेटिव्ह व इंटिग्रल) हे मूलभूत गणिती पद्धत म्हणून व भौतिकीतील चलनाचे विश्लेषक म्हणून आजही त्यांचा वापर होतो. त्याच्या या संकल्पनेमुळे गणितशास्त्रात

मॅथेमॅटिकल ॲनालिसिस ही स्वतंत्र शाखा भरभराटीस आली. आजही या शाखेचे संशोधक/अभ्यासक मोठ्या प्रमाणात कार्यरत आहेत.

गंमत म्हणजे या तरुण न्यूटनने आपल्या या संशोधनाचा अजिबात गाजावाजा केला नाही. त्याच्या निबंधाच्या प्रती इसॅक बारो व गणिती वर्तुळातील काही मोजक्या अभ्यासकांना 1669मध्ये त्यानी पाठवले असले तरी त्याची अधिकृत प्रत 1711मध्ये प्रकाशित झाली. या मध्यंतरीच्या काळात गॉटफ्रिड लेब्निझ या फ्रेंच गणितज्ञाने अशाच प्रकारच्या सिद्धांताचा शोध लावला व कॅल्क्युलसचा प्रथम संशोधक आपण आहोत, असे दावा केला. न्यूटननेसुद्धा वेळ न दवडता या संकल्पनेवर आपला हक्क आहे असा प्रतिदावा केला. परंतु गणित व विज्ञान जगतात या दावे-प्रतिदावेमुळे खळबळ उडाली व कित्येक वर्षे हे तुमुल युद्ध चालू होते. खरे पाहता 17व्या शतकाच्या प्रारंभीच्या काळात या दोन्ही महान गणितज्ञांना ही संकल्पना एकाच वेळी सुचली असेल याबद्दल शंका नसावी. त्या काळात वक्ररेषेअंतर्गत क्षेत्रफळ-घनफळ वा किमान-कमाल घटक यासाठी योग्य व सुलभ पद्धत शोधण्यासाठी अनेक गणितज्ञ श्रम घेत होते. म्हणूनच कदाचित न्यूटनने “मी अनेक महान व्यक्तींच्या खांद्यावर उभे राहून जगाकडे लांबवर पाहू शकलो तर…” असे त्याकाळचे त्याचे सहकारी रॉबर्ट हूक यांच्याशी केलेल्या पत्रोत्तरात उद्गार काढले होते.

त्याच्या या विधानातील नम्रपणा थोडेसे बाजूला ठेवले तरी न्यूटनने स्वतःतील प्रतिभेमुळे जगाला एक नवी दिशा दिली याबद्दल तिळमात्र संशय नाही. म्हणूनच त्याच्या मृत्युशिलेवर कोरलेले ‘मानवजातीला अलंकार वाटावा अशी एक प्रतिभावान व्यक्ती अस्तित्वात होती, म्हणून मर्त्य मानव आनंदित होतील,’ (“Mortals rejoice that there has existed such and so great an ornament of the human race!”) हे वाक्य आपल्या कायमचे लक्षात राहील.

●●●

गणिताच्या अचूकतेचा अंत

(व संगणकीय प्रणालीचा उदय)

We must know. We will know.

David Hilbert

19व्या शतकाच्या उत्तरार्धात मानवी ज्ञान संकलनात फार मोठ्या प्रमाणात घडामोडी घडत होत्या. एका प्रकारे ते एक वादळच होते. औद्योगिक क्रांतीने पाश्चिमात्य देशातील समाजाची जीवन शैलीच पूर्णपणे बदलून टाकली होती. विज्ञान व तंत्रज्ञानातूनच विकास होत राहील व त्यांना दुसरा कुठलाही पर्याय नाही असेच त्याकाळच्या समाजाला वाटू लागले. या झंझावातातसुद्धा गणित मात्र आपले स्वत्व टिकवून होते व ते जास्तीत जास्त अचूक कसे राहील यावर भर दिले जात होते. परंतु या शतकाच्या शेवटच्या दशकात मात्र गणितज्ञांनाच आपल्या या शास्त्राच्या अचूकतेविषयी शंका वाटू लागली.

अनेकांना विज्ञानातील संकल्पना – विशेष करून अनंतता (infinity) ही संकल्पना – गणिताच्या सिद्धांतात आणण्यावर भर का देऊ नये असे वाटू लागले. खरे पाहता गणिताच्या विश्वासार्हतेबद्दल संशय व्यक्त करणारा हा विषय अनेक वेळा गणिताच्या व तत्वज्ञाच्या अभ्यासकांच्या चर्चेत आलेला विषय होता. एक मृत पावलेला, चावून चावून चोथा झालेला तो विषय होता.

1874 साली संच (सेट) सिद्धांताचा जनक, जीऑर्ग कँटॉर (1845 - 1918) या जर्मन गणितज्ञाने या मृत पावलेल्या राक्षसाला पुन्हा एकदा जागे केले. गणितातील काही विरोधाभासामुळे (paradox) त्याच्या मनात संशयाचे भूत संचारले. गणितातील काही मूलभूत समस्यामुळे गणित हे पूर्णपणे अचूक नाही; काही प्रसंगात हे का ते असा प्रश्न उद्भवू शकतो, असे

त्याला राहून राहून वाटत होते. याचीच ‘री’ ओढणाऱ्यात कुर्ट गोडेल व ॲलन ट्यूरिंग हे दोन गणितज्ञ आघाडीवर होते.

याच्याही अगोदर काही वर्षांपूर्वी गणितज्ञांत दोन तट पडले होते. त्यापैकी एक तट डेव्हिड हिल्बर्टच्या (1862- 1943) नेतृत्वाखाली थोडासा वेळ दिल्यास गणित सर्व काही साध्य करू शकते असे गणितावर विश्वास दर्शविणारे विधान करणाऱ्यांचे होते. हिल्बर्ट हा त्याकाळचा अत्यंत प्रतिभाशाली व नावाजलेला गणितज्ञ होता. “We must know. We will know.” हे त्याचे सुप्रसिद्ध विधान त्याकाळी गणितजगातील सर्वांच्या तोंडी होते. गणितातील विरोधाभास व त्यातील काही चुकीच्या गोष्टी निपटून काढून गणिताच्या परिशुद्धतेची जपणूक करण्यासाठी त्यातील स्वयंसिद्धकांची (axioms) पुनर्व्याख्या करावी यावर हा गट लक्ष केंद्रित करू लागला.

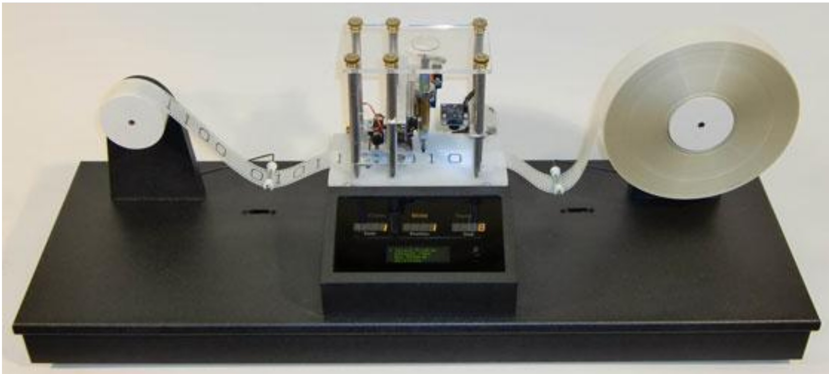
त्यांच्या या अभियानाला हिल्बर्ट प्रकल्प असे नाव दिले गेले. या प्रकल्पातील चर्चेतून योग्य प्रकारात व्याख्या असलेल्या स्वयंसिद्धकांचे तीन महत्वाचे गुणधर्म आहेत, असे निष्कर्ष काढण्यात आले. एक, त्यांच्यात सुसंगती असल्यामुळे एकदा बरोबर व नंतर चूक अशा प्रकारच्या विरोधाभासाला त्यांच्यात वाव नसणार; दोन, त्या सांत (finite) असल्यामुळे त्यांची सिद्धता तार्किकरित्या व अल्गॉरिदम्स वापरून अगदी दोन्ही टोकापर्यंत जाऊन दाखविता येते; व तीन, त्यांच्यातील प्रत्येक विधानातून बरोबर की चूक हे निर्दिष्टपणे सूचित करता येत असल्यामुळे त्या स्वयंपूर्ण असणार. सुसंगती, संपूर्णता, निर्णय प्रक्रिया (consistency, completeness, decision process) या गटाचे कळीचे प्रश्न होते. त्या काळच्या अनेक अभ्यासकांना या शंकांचे निरसन कधीच होणार नाही असेच वाटले असेल. कदाचित तिची उत्तरे तर्कशास्त्राच्या अपूर्णतेच्या क्षेत्रात असू शकतील.

या साऱ्याने गणितविश्व ढवळून निघाले. या प्रकारच्या बौद्धिक वादानंतर 1930 साली हिल्बर्टचे जन्मस्थान असलेल्या कोनिग्स्बर्ग येथे गणिती काँग्रेसचे आयोजन करण्यात आले. दोन्ही तटातील वादांच्या मुद्यावर चर्चा करून प्रकल्पाच्या निष्कर्षाबद्दल सहमत घडवून आणणे हा या काँग्रेसचा उद्देश होता. शेवटच्या सत्रात सर्व वरिष्ठ गणितज्ञांची करडी नजर रोखलेली असताना 25 वर्षाच्या तरूण कुर्ट गोडेलने (1906 –1978) हात वर करून कुठलीही प्रणाली एकाच वेळी सुसंगत, परिवर्ती व स्वयंपूर्ण असू शकत नसल्यामुळे हिल्बर्ट प्रकल्प पूर्ण होणे अशक्य आहे, हे त्यानी सिद्ध करून दाखविले.

वर्षभरात कुर्ट गोडेलचा On Formally Un-decidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems हा शोध निबंध प्रकाशित झाला. यात त्यानी अपूर्ण (व/वा अनिर्णीत) सिद्धांताविषयी गुंतागुंतीची असली तरी तर्कशुद्ध अशी मांडणी केली होती. अशा प्रकारे हिल्बर्टच्या प्रकल्पाचा अंत झाला. विरोधाभासरहित अशी निश्चित प्रणालीची रचना करण्याचे कितीही प्रयत्न केले तरी त्यातील काही विधानं बरोबर की चूक हे सिद्ध करण्याच्या पलीकडच्या असतात अशी त्याची मांडणी होती. गोडेलचा हा सिद्धहेतू (proof) गणिताच्या इतिहासातील निर्णायक टप्पा असा समजला जातो.

गोडेलचाच हा वारसा ॲलन ट्युरिंग (1912 –1954) या ब्रिटिश गणितज्ञाने पुढे चालविला. जरी हा गणितज्ञ दुसऱ्या महायुद्धाच्या काळी शत्रुपक्षाचे गुप्त संदेश उलगडून मित्रपक्षाला निर्णायक विजय मिळवून मदत करणाऱ्या एनिमा (Enigma) मशीनचा जनक म्हणून ओळखला जात असला तरी त्या पूर्वी, 1937 च्या सुमारास, त्यानी लिहिलेल्या शोधनिबंधामुळे गणितातच नव्हे, तर संपूर्ण समाजातच मोठ्या प्रमाणात बदल झाला. गोडेलचीच तर्कपद्धती वापरून ॲलन ट्युरिंगने त्या शोधनिबंधात निर्णय समस्याबद्दल (“decision problem”) काही मूलभूत मांडणी केली होती. त्याच्या मते कुठल्याही प्रणालीत काही सुनिश्चित क्रमाने गेले तरी यदृच्छ वा निर्दिष्ट समस्येचे उत्तर सापडेलच याची खात्री देता येत नाही. गोडेलच्या

अनेक समस्यांना नेमके उत्तर मिळत नाही या विधानाला जोडून अशा समस्या कोणते आहेत याचाही अंदाज घेत येत नाही, असे ट्यूरिंगने त्यात भर घातली. त्याच्या या विधानाच्या पुष्ट्यर्थ त्यानी यासाठी एक क्रांतीकारक अशा विचार-प्रयोगाच्या कल्पनेची मांडणी केली.



ॲलन ट्युरिंग (1912 –1954) यानी एका काल्पनिक मशीनची रचना केली. त्याला युनिव्हर्सल मशीन असे नामकरण केले. ही सुलभ यंत्रणा बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार - भागाकार सारख्या गणिती प्रक्रिया पाहिजे तितक्या वेळा ती अचूकपणे करू शकते. यात एका बाजूला कधीच न संपणारी लांब लचक टेप असलेली तबकडी व दुसऱ्या बाजूला मशीनमधून बाहेर पडणाऱ्या टेपला गुंडाळून ठेवणारी दुसरी तबकडी जोडलेली असते व या टेपवर चौरसाच्या आकृत्या असतात व त्या चौरसावर खुणा असतात. वरच्या बाजूला त्या टेपवरील खुणा ओळखणारे व त्यात सुधारणा करून ती खूण बदलू शकणारे एक हेड असते. खालच्या बॉक्समध्ये टेपला उजवीकडे किंवा डावीकडे सरकवणाऱ्या तरफा जोडलेल्या आहेत. व त्यात मशीनला सूचना देणारी प्रोग्रामसदृश एक यंत्रणा असते.

ट्यूरिंगची ही अमूर्त कल्पना आज जरी अगदीच क्षुल्लक वाटत असली तरी जगभरातील संगणक व स्मार्टफोन्स ट्यूरिंग मशीनचे वास्तवातील दृश्य स्वरूप आहेत, असे म्हणता येईल. गोडेल व ट्यूरिंगच्या गणितातील मर्यादा स्पष्ट करणाऱ्या

अफाट कल्पनेमुळे आधुनिक मशीन्सचे युग अवतरले व मानवी ज्ञानच मर्यादा ओलांडून भरारी घेऊ लागली, असे नक्कीच म्हणता येईल.

●●●

गणितच जगलेली एम्मी नोएथर

I am not a woman mathematician, I am a mathematician.

Emmy Noether

पुरुषप्रधान व्यवस्थेने स्वतःच्याच मानवी वंशातील 50 टक्के भाग असलेल्या महिलांना प्रत्येक क्षेत्रात दुय्यम/कनिष्ठ स्थान दिल्यामुळे समाजाचे किती नुकसान झाले याची आपण कल्पनाच करू शकत नाही. पुरुषी वर्चस्वाच्या त्रासामुळे अनेक सर्जनशील महिलांची कुचंबणा झाली, हे नाकारण्यात अर्थ नाही. कदाचित अशा पाशवी वृत्तीमुळेच पुरुष-गणितज्ञांच्या तुलनेत स्त्री-गणितज्ञांची संख्या अगदीच नगण्य आहे, असे म्हणता येईल.

गणित हा विषयच स्त्रीबुद्धीच्या पलिकडे आहे असे जाणीवपूर्वक प्रयत्न पुरुषप्रधान संस्कृतीने केले असले तरी काही स्त्रियांनी सगळी जाचक बंधनं झुगारून देऊन या क्षेत्रातही चमकदार कामगिरी केल्याची उदाहरणं गणिताच्या इतिहासात सापडतील. यात इ.स.पूर्व 6व्या शतकातील थेओना, चौथ्या शतकातील हायपेशिया, अठराव्या शतकातील मारिया अग्नेसी व सोफी जर्मेन, 19व्या शतकातील सोन्या कोव्हल्येस्केया व एम्मी नोएथर यांची नावे प्रामुख्याने घेता येतील.

एम्मी नोएथरच्या एका गणिती सिद्धांतामुळे 1915 साली मांडलेल्या आइन्स्टाइनच्या क्रांतीकारक असे समजलेल्या सर्वसाधारण सापेक्षता सिद्धांताला गणितीय पुष्टी मिळाली. एम्मी नोएथरने ही जनरल थेअरी कुठे कुठे वापरता येईल याविषयी अंदाज वर्तविला. आइन्स्टाइनच्या थेअरीवर विचार करणाऱ्या काही वैज्ञानिकात ती आघाडीवर होती. विद्यापीठात प्रवेश नाकारल्या गेलेल्या एम्मी नोएथरने आपल्या विश्वाचे स्वरूप विशद करणाऱ्या शक्तीच्या अक्षय्यतेची (कॉन्सर्व्हेशन ऑफ एनर्जी) समस्या समजावून

सांगणाऱ्या सिद्धांताची मांडणी करून त्या काळच्या सर्व वैज्ञानिकांना आश्चर्याचा धक्का दिला.

एम्मी नोएथरचे (1882-1935) पूर्ण नाव अमाली एम्मा नोएथर असे होते. परंतु तिला एम्मी नोएथर या नावानेच ओळखले जाते. 19व्या शतकाच्या उत्तरार्धात भौतिकी व गणित या विज्ञान शाखेचे प्रमुख केंद्र म्हणून जर्मनीचा नावलौकिक होता. एम्मी नोएथरची मायभूमी जर्मनी होती. व तिचे बालपण जर्मनीतील अर्लंजेन येथे गेला. अर्लंजेन विद्यापीठात तिचे वडील, मॅक्स नोएथर बीजगणित शिकवत होते. घरात गणिताचे वातावरण होते. तसे पाहता एम्मी तितकी हुषारही नव्हती. त्या काळच्या मुलींच्याबद्दलच्या रीती-रिवाजानुसार शिवण-नर्सिंगसारख्या गोष्टी तिने शिकल्या होत्या. इंग्रजी व फ्रेंच भाषा-विषयात तिने डिप्लोमा मिळवला. त्यामुळे ती फ्रेंच व इंग्रजी शिक्षिका म्हणून काम करू लागली

त्या काळी जर्मनीत मुलींना विद्यापीठात प्रवेश नव्हता. फक्त त्यांना व्याख्यानं ऐकण्याची मुभा होती, तीसुद्धा पुरुष प्राध्यापकांनी परवानगी दिली तरच! जर मुली शिकून सैन्याधिकारी झाल्यास पुरुष सैनिकांना महिलेला सॅलूट करणे अवघड जाईल, ही मानसिकता त्यामागे होती. तरीही तिने आपले प्रयत्न सोडले नाहीत. 1901 साली तिने अर्लंजेन विद्यापीठात एक श्रोता म्हणून प्रवेश मिळविला. 987 विद्यार्थी असलेल्या या विद्यापीठात फक्त दोन मुली – व तेही फक्त श्रोते म्हणून नोंद झालेल्या – होत्या. 1904साली प्रवेशासंबंधीच्या अटीतील बदलामुळे तिला इतर विद्यार्थ्यासारखे चर्चा करण्याचा, प्रश्न विचारण्याचा समान दर्जा मिळाला.

पुढील चार वर्षात बीजगणित पद्धतीने निश्चलित (invariants) शोधण्याच्या रीतीबद्दल तिने शोधनिबंध लिहिला व तिला त्याबद्दल डॉक्टरेट पदवी मिळाली. एखादी वस्तु चलनावस्थेत असूनसुद्धा जागा बदलत

नसल्यास ती वस्तु निश्चलित (invariant) स्थितीत असते. उदाः स्वतःच्या केंद्राभोवती फिरणारी तबकडी वा कुठलीही स्पिनिंग वस्तु. बीजगणिताचा वापर करून तिने यासाठी काही बहुपदीय पदावलीची (polynomial expressions) मांडणी केली. अवकाशातील अशा निश्चलितची व्याख्या तिने केली.

एम्मी नोएथरला जरी डॉक्टरेट पदवी मिळाली असली तरी ती विद्यापीठात प्रोफेसर म्हणून विद्यार्थ्यांना शिकवू शकत नव्हती. वडिलांच्या नावेच तिला शिकवावे लागत होते. कारण त्या काळी कुणाकडे आपण शिकायचे हे फी भरताना विद्यार्थीच ठरवत असत. ती स्त्री असल्यामुळे ती शिकवू शकेल की नाही याबद्दल विद्यार्थ्यांच्या मनात सुरुवातीला शंका होत्या. परंतु इनव्हेरियंटच्या तिच्या शोधनिबंधामुळे जर्मनीतील गणितज्ञांना तिच्याबद्दल आपुलकी निर्माण झाली.

भौतिकीत, व विशेष करून सापेक्षता सिद्धांतात, इन्व्हेरियंट्सचा वापर कसे करता येईल याबद्दलच्या संशोधनात तिला जास्त रुची होती. हिल्बर्टसहित अनेक वैज्ञानिकाना सर्वसाधारण सापेक्षता सिद्धांताच्या चौकटीत शक्तीच्या अक्षय्यतेचा (कॉन्सर्व्हेशन ऑफ एनर्जी) प्रश्न सोडविण्यात यश आले नव्हते. लॅग्रांजियन सिमिट्रीच्या सिद्धांतावर आधारलेले तिच्या 'नोएथर थेरम'मुळे इन्व्हेरियंट्स व शक्तीच्या अक्षय्यतेच्या सिद्धांतातील काही अनुत्तरित प्रश्न सोडविण्यात वैज्ञानिकांना यश मिळाले. भौमितिक आकृतीवर भौमितिक पद्धतीने रूपांतरे घडविली तरी त्याचे महत्वाचे गुण तसेच राहतात, या इन्व्हेरियंट्सचा गुणधर्म केवळ सैद्धांतिक स्वरूपात नसून शक्तीच्या अक्षय्यतेच्या स्वरूपात वास्तवातील गुणधर्म आहे हे तिने सिद्ध करून दाखविले.

या संशोधनामुळे अनेक विद्यापीठातील गणितज्ञांशी ती संपर्कात आली. तिचे अनेक गणितज्ञबरोबर मैत्रीचे संबंध होते. त्याकाळचे सुप्रसिद्ध गणितज्ञ डेव्हिड हिल्बर्टशीसुद्धा तिची मैत्री होती. 1915साली त्याने तिला गॉटिंजेन विद्यापीठात गणितावरील संशोधनाबरोबर विद्यापीठात शिकविण्यासाठी आमंत्रण दिले. त्यावेळी गणित विषयावर फार मोठ्या प्रमाणात तेथे संशोधन केले जात होते. तिला तेथे विना वेतन व्याख्यानं द्यावे लागणार होते. कारण त्याकाळी महिला प्रोफेसर्सना व्याख्यानं देण्यास मज्जाव होता. तरीसुद्धा तिने तेथे आपले संशोधन पुढे चालू ठेवले. पहिले काही वर्षे विना वेतन काम केल्यानंतर 1922च्या सुमारास तिला थोडे फार वेतन मिळू लागले. या नंतरच्या काळात तिने अमूर्त बीजगणित, व विशेष करून रिंग्स व त्याच्या उपसंचावर (the rings and their subsets, called ideals) लक्ष केंद्रित केले. नंबर थेअरीमधील या उपशाखेची तज्ञ म्हणून नोएथरची ओळख दृढ झाली. 1931 साली प्रकाशित झालेल्या तिच्या मॉडर्न अल्जिब्रा या पाठ्यपुस्तकामुळे तिला वारेमाप प्रसिद्धी मिळाली. 1932 साली आयोजित केलेल्या इंटरनॅशनल काँग्रेस ऑफ मॅथेमॅटिक्स येथे तिने केलेल्या बीजभाषणामुळे बीजगणितातील तिच्या तल्लख बुद्धिमत्तेचे जगभरातील गणितज्ञांनी कौतुक केले. तिने डॉक्टरेट थीसीससाठी 16 संशोधकांचे मार्गदर्शन दिले होते. (त्यापैकी फक्त एकच महिला होती.) 1933पर्यंत गॉटिंजेन विद्यापीठातील गणित विभागातील ती एक प्रमुख गणितज्ञ होती. तिच्या विद्यार्थ्यांना तर 'नोएथर बॉयज्' या नावाने इतर ओळखत असत.

याच काळात जर्मनीमध्ये नाझी पक्षाची सत्ता आली. ज्यू वंशजाना कामावरून काढून टाकण्यात येऊ लागले. गॉटिंजेन विद्यापीठातील गणित विभागातील एम्मी नोएथर व इतर 16 गणित संशोधकांच्या नोकऱ्या गेल्या. एम्मी नोएथरला नाइलाजाने अमेरिकेतील एका छोट्या कॉलेजमध्ये प्राध्यापिकेची नोकरी पत्करावी लागली. प्रध्यापकी पेशा संभाळून ती प्रिन्स्टन विद्यापीठात संशोधन करू लागली. वयाच्या 53व्या वर्षी गर्भकोशाच्या एका गंभीर आजारासाठी तिला दवाख्यान्यात

दाखल करावे लागले. पुढील चार दिवसात उपचाराच्या वेळी अचानक मरण पावली. अल्बर्ट आइन्स्टाइनने आपल्या शोक संदेशात गणितज्ञांच्या इतिहासातील एक उत्कृष्ट प्राध्यापिकेचा मृत्यु झाला असे खालील प्रकारे दुःख व्यक्त केलेः

In the judgment of the most competent living mathematicians, Fraulein Noether was the most significant mathematical genius thus far produced since the higher education of women began.

Albert Einstein

●●●

केऑस(अनागोंदी) मधील सुसंगतीच्या शोधात

Chaos often breeds life, when order breeds habit.

Henry Adams

दिवसेन दिवस जगणे अगदीच बिनभरवश्याचे होत आहे. जगभर करोडोनी अनपेक्षित घटना घडत असतात. आपल्याला असे वाटते की आपल्या नित्य जीवनावर किंवा जगातल्या कुठल्याही गोष्टीवर त्यांचे काहीही परिणाम होणार नाहीत. परंतु अशा काही अनपेक्षित घटनांचे थोडेसे विचारपूर्वक व बारकाईने विश्लेषण केल्यास त्यात एखादी सुसंगती असू शकेल वा त्यातून एखादे पॅटर्न निघू शकेल अशी एक दाट शंका मनाला चाटून जाऊ शकते. अगदी इतिहास काळापासून वैज्ञानिक, तत्वज्ञ व विचारवंत, जगभरातील घटनामागील सातत्य शोधत असताना त्यांच्या मागे काही सुसूत्रता आहे का वा त्या कुठल्यातरी नियमांच्या चौकटीत बसतात का याचा शोध घेत असतात व त्या घटनामागे कुठले नियम लागू होत असतील याचा कयास बांधत असतात. काही वेळा घटनामागील सुसंगती ठळकपणे असल्याचे लक्षात येते. उदाः घड्याळाच्या लंबकाच्या चलनातील पॅटर्न वा ग्रह-ताऱ्यांचे भ्रमणमार्ग व कालावधी, वा समुद्राची ओहोटी-भरती. यातील कार्य-कारणभाव समजून घेण्यात आपण यशस्वी झालेलो आहोत. एवढेच नव्हे तर काही नैसर्गिक घटनांच्या मागे दडलेले नियम शोधणेही आपल्याला शक्य झाले आहे.

परंतु काही नैसर्गिक घटना अजूनही आपल्याला चक्रावून टाकत आहेत. उदाः वातावरणात होत असलेले बदल वा हृदयातून व हृदयाकडे वाहत जाणारा रक्ताचा पुरवठा वा हवामानाचा लहरीपणा. गेली अनेक शतके या कॉम्प्लेक्स सिस्टिम्सचे उत्तर अशक्य असेच वाटत होते. म्हणूनच या

समस्यांना आपण त्यांची यादृच्छिक (random) वा दैवी घटना या सदरात टाकत होतो. खरे पाहता अशा घटनांचे गणितीय विश्लेषण करू न शकल्यामुळे त्यांच्या संरचना समजत नव्हत्या. परंतु केऑस सिद्धांताने आपली समज पूर्णपणे बदलून टाकली. व यासाठी हेन्री पॉइनकरे (1854 –1912) व एड्वर्ड लॉरेंझ (1917 –2008) यांना आपण ऋणी आहोत.

विसाव्या शतकातल्या गणिताचा पाया हेन्री पॉइनकरे या अद्वितीय गणितज्ञानं घातला. 19व्या शतकात अनेक उत्तमोत्तम गणितज्ञं झाले. पण पॉइनकरे हा त्यांचा शिरोमणी ठरला. प्युअर आणि अप्लाईड अशा दोन्ही गणितांचा अभ्यास करणारा तो बहुधा शेवटचा गणितज्ञ असावा. अंकगणित, बीजगणित, भूमिती, गणितीय विश्लेषण, खगोलशास्त्र, गणितीय भौतिकशास्त्र अशा गणिताच्या विविध शाखावर त्याचे प्रभुत्व होते. गणिताच्या इतिहासातला अशा प्रकारचा प्रभुत्व असणारा हा शेवटचा गणितज्ञ ठरेल. या फ्रेंच गणितज्ञाचे बहुगतिक तंत्र (dynamic systems) व टोपोलॉजीसंबंधी केलेले योगदान अविस्मरणीय ठरेल. टोपोलॉजी या शाखेचा तो जनक होता.

1887मध्ये गणित विषयात विशेष रुची असलेल्या नार्वे-स्वीडनचा राजा, ऑस्कर II यानी गणिताच्या अभ्यासकांसाठी स्पर्धा जाहीर केली. स्पर्धेचा विषय होता: न्यूटनच्या गतिकी नियमांचे व समीकरणांचे वापर करून सौरमालिकेतील ग्रहांचे यापूर्वीच्या काळातील व भविष्यातील स्थान. याबद्दलच्या माहितीवरून पॉइनकरेनी व्यवस्थेतील अनिश्चिततेविषयी काही ठोकताळ्यावरून प्रारंभीच्या स्थितीतील काही बारीक-सारीक फरकसुद्धा अंतिम स्थितीवर फार मोठे परिणाम करू शकतात, अशी मांडणी केली. सुरुवातीची थोडीशी चूक शेवटी शेवटी बृहदाकार घेत असल्यामुळे निश्चित असे काही सांगता येत नाही. त्यामुळे समस्येला उत्तर मिळू शकत नाही. या मांडणीबद्दल पॉइनकरेला स्पर्धेचे पारितोषक मिळाले.

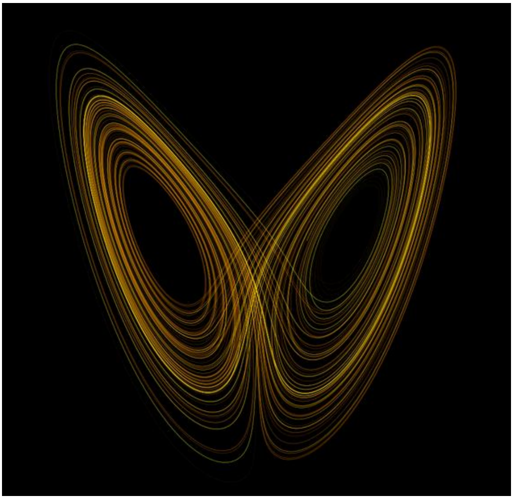
पॉइनकरे याच्या अनिश्चितेच्या मांडणीकडे पुढील शंभर वर्षे दुर्लक्षित केले गेले. परंतु एड्वर्ड नॉर्टो एन लॉरेंझ या गणितज्ञ -हवामानतज्ञामुळे पुन्हा एकदा त्या मांडणीला जीवदान मिळाले. हवामानातील हवेच्या प्रवाहाच्या एका गणिती प्रारूपाचा अभ्यास करत असताना पॉइनकरेचा शोधनिबंध तो वाचत होता. त्यावरून त्यानी या प्रारूपाची फेरमांडणी केली. प्रारूपाचे सदृशीकरण करण्यासाठी सुरुवातीच्या इन् पुट्स (inputs) ऐवजी पहिल्या प्रारूपातील मधलेच इन् पुट्स घेत नंतरच्या प्रारूपासाठी वापरू लागला.

संगणक सहा दशांशपर्यंतच्या संख्या आकडेमोडीसाठी वापरते व तीन दशांशापर्यतच प्रिंट करते. लॉरेंझसुद्धा प्रिंट केलेल्या संख्याच इन् पुटसाठी वापरत होता. या दोन्ही संख्यामध्ये 0.0001 पेक्षा कमी फरक असल्यामुळे पहिल्या प्रारूपासरखेच दुसऱ्या प्रारूपाचेही सदृशीकरण अपेक्षित होते. परंतु या दोन्ही प्रारूपाप्रमाणे केलेल्या हवामानाच्या अंदाजात फार मोठा फरक आहे असे त्याला जाणवले. त्यानी या सर्व गोष्टी त्याच्या "Predictability: Does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?" या शोधनिबंधात मांडल्या. व एका परिषदेत त्याचे वाचन केले. या शोधनिबंधाच्या वाचनाच्या वेळी त्यानी 'बटरफ्लाय इफेक्ट' या शब्द समुच्चयाचा पहिल्यांदा वापर केला.

काही वर्षानंतर गणितातील सर्वोच्च पारितोषक असे मानले गेलेल्या फील्ड

मेडल हे पारितोषक मिळवणाऱ्या स्टिफन स्मेल या कॅलिफोर्निया विद्यापीठातील गणितज्ञाने 'स्मेल हॉर्सशू' नावाच्या संकल्पनेच्या मांडणीतून केऑस कमी करणाऱ्या पदावलीचा शोध लावला. ही एक भौमितीय परिवर्तन असून त्यात एखाद्या चौकोनाचे अनेकवेळा आकुंचन, प्रसरण वा घडी करत राहिल्यास एका विशिष्ट क्षणी त्याचा आकार घोड्याच्या नालासारखा दिसू

लागतो. संकल्पना सोपी असली तरी त्यातून जगभर अनुभवात येणाऱ्या केऑसकडे वाटचाल होऊ शकते.



परंतु सुसंगतेचा केऑसमध्ये कसा काय बदल होऊ शकतो? 1970च्या सुमारास गणीतीय भौतशास्त्रज्ञ, मिचेल फेनबॉम यानी एक मूलभूत प्रस्ताव मांडला. संगणकांच्या अफाट कार्यक्षमतेचा वापर करून सुसंगतीचे केऑसमध्ये रूपांतर करणाऱ्या गणीतीय फंक्शन्सचे उत्तर शोधत असताना एका स्थिरांक दिसू लागतो. हा स्थिरांक सुमारे 4.6692… असून हा स्थिरांक फेनबॉम स्थिरांक या नावाने गणित विश्वात ओळखला जातो.

1980च्या दशकात केऑस चर्चेसाठी हा फार मोठा विषय होता. अनेक विद्यापीठात व संशोधक केद्रात गणितज्ञांचे गट रेखीव नसलेले गतिक nonlinear dynamics व जटिल प्रणाली या विषयासाठी वाहून घेत होते. बायफर्केशन (बारीक-सारिक बदलामुळे प्रणालीचे द्विविभाजन होणे), फ्रॅक्टल

(केऑसची प्रतिकृती) सारख्या पदांची रेलचेल वाढू लागली. त्याचबरोबर बटरफ्लाय इफेक्ट तर गटातील सर्वांच्या तोंडी होते.

केवळ गणित नव्हे तर हवामान शास्त्र, मानववंश शास्त्र, समाज शास्त्र, भौतिकशास्त्र , तत्वज्ञान, संगणक शास्त्र, यांत्रिकी इत्यादी सर्व संलग्न ज्ञानशाखेच्या शास्त्रज्ञांना निसर्गातील यदृच्छतेपलीकडे बघावेसे वाटत होते. निसर्गाची मनमानी असे वाटणाऱ्या घटनांच्यातून काही अर्थबोध होऊ शकतो का याचा विचार करत होते. अर्थशास्त्रज्ञसुद्धा अनपेक्षितरित्या चढ-उतार होत असलेल्या आर्थिक बाजाराच्या विश्लेषणासाठी व हवामानतज्ञ हवामान बदलातील मागोवा घेण्यासाठी या केऑस सिद्धांताचा उपयोग होईल का याचा अंदाज घेत होते. खगोलशास्त्रज्ञसुद्धा अवकाशातील ग्रह-ताऱ्यांच्या भ्रमणातील काही अनुत्तरित प्रश्नांची उत्तरं शोधण्यासाठी या सिद्धांताचा उपयोग करून घेण्यात रुची दाखवत होते. या सर्व क्षेत्रामध्ये केऑस सिद्धांतामुळे काही क्रांतीकारक बदल होऊ लागले.

निसर्गातील मनमानी वा अनागोंदी सदृश असलेल्या लाखो-करोडो घटनामध्येसुद्धा काही सुसंगती असू शकते याचा शोध घेण्यासाठी   केऑस सिद्धात हे एक महत्वपूर्ण गणीतीय साधन म्हणून पुढे येऊ लागले. हा सिद्धांत खालील दोन कल्पनांच्या भोवती विकसित झाला आहेः

अगदी गुंतागुंतीच्या समजल्या गेलेल्या घटनाक्रमामध्येसुद्धा सुसंगती असू शकते, व या कॉम्प्लेक्स सिस्टिम्सच्या दूरगामी परिणामाचा वेध घेत असताना प्रारंभीच्या स्थितीतील थोडासा फरकसुद्धा (उदाः तापमानातील किरकोळ बदल वा वाऱ्याच्या वेगातील फरक वा पाण्याच्या प्रवाहाच्या वेगातील किरकोळ फरक) फार मोठा परिणाम घडवू शकतो व त्याचे मोजमाप करणे अशक्य ठरते. (गणीतीय भाषेत या स्थितीला प्रारंभीच्या स्थितीवर निर्भर असलेली प्रणाली असे म्हटले जाते.)

याचा अर्थ असे नव्हे की काही यादृच्छिक घटकांना वगळून प्रारंभीची स्थिती समजली म्हणून जे काही होणार आहे ते टाळता येत नाही. त्यामुळे नियतीवादी गुणधर्म असणाऱ्या या सिस्टिम्सबद्दल पुढे काय होणार हे निश्चितपणे सांगता येणार नाही. फार फार तर केऑस सिद्धांताचा वापर करून कॉँम्प्लेक्स सिस्टिम्सचा भविष्यवेध का घेऊ शकत नाही याचे विश्लेषण करणे शक्य होईल.

●●●

गणितामार्फत विश्वाचा शोध घेणारा रेने देकार्त

I think, therefore I am.

देकार्त

पारंपरिक रूढ पद्धतीत गुरफटलेल्या गणिताला वेगळे परिमाण देत वैज्ञानिक संशोधनाला कलाटणी देणारा रेने देकार्त (1596-1650) हा सतराव्या शतकातील केवळ प्रतिभाशाली गणितज्ञ नव्हता तर तो एक विचारवंत व संशोधकही होता. चौथ्या शतकापसून सोळाव्या शतकापर्यंतचा कालखंड अंधारयुग म्हणूनच युरोपमध्ये ओळखला जातो. राजे-महाराजे, राणी-महाराणी, सरदार, अमीर-उमराव, सैन्यधिकारी, जमीनदार, राजांच्या मर्जीतले अधिकारी इत्यादींचे वर्चस्व त्या काळी होते. त्यांची मनमानी सर्रासपणे चालवून घेतली जात होती. सामाजिक न्यायव्यवस्था अशी काही व्यवस्था नव्हती. लूटमार करणारे राजकीय नेत्यांशी संगनमत करून सामान्यांना नामोहरम करत होते. यातच भर म्हणून सगळीकडे धर्मसत्तेने उच्छाद मांडला होता. धर्माच्या नावे ठिकठिकाणी लढाया लढले जात होते. व या वित्तहानी व जिवीतहानीत सामान्य भरडले जात होते. नागरिक समाजाचा मागमूसही नव्हता. सार्वजनिक स्वच्छतेबद्दलची प्राथमिक जाणही त्या काळी नव्हती. प्लेग, कॉलरासारखे साथीच्या रोगामुळे हजारोनी बळी जात होते. सत्तेवर असलेल्यांना त्याचे सोयर-सुतकं नव्हते. श्रीमंतातले श्रीमंत म्हणविणाऱ्यांची घरंसुद्धा उकिरडेसदृश होते. जरी या काळातील मोठमोठे सुंदर शिल्पकलेचे नमूने बघावयास मिळत असले तरी ते सर्व सामान्यांच्या जिवावर बांधलेले होते, हे विसरता येत नाही.

परंतु सतराव्या शतकानंतरचा काळ मात्र प्रबोधनाचा काळ म्हणून ओळखला जातो. देकार्तचा हा कालखंड संक्रमणाचा कालखंड होता; जुन्या रूढी-परंपरा अस्तंगत झाल्या नव्हत्या व आधुनिकता अजून उदयास आली नव्हती. बौद्धिकदृष्ट्या हा कालखंड अत्यंत समृद्ध होता. शेक्सपियरच्या मृत्युच्या वेळी देकार्त 20-21 वर्षाचा असेल. फेर्मा व पास्कल देकार्तचे समकालीन होते. देकार्तच्या मृत्युसमयी न्यूटन आठ वर्षाचा होता. मिल्टनच्या जन्माच्या वेळी देकार्त सात वर्षाचा होता. गॅलिलिओ, देकार्त पेक्षा आठ वर्षे जास्त जगला. रक्ताभिसरण क्रियेचा संशोधक, हार्वे सात वर्षे जास्त जगला.

तत्वज्ञ व गणितज्ञ म्हणून गाजलेल्या देकार्तचे सुरुवातीचे आयुष्य हे एखाद्या वादळात हेलकावे खात चाललेल्या जहाजासारखे होते. मातृसुख न लाभलेला देकार्त लहानपणी आजारपणामुळे कायमचा घरात कोंडलेला एकलकोंडा होता. सारखा अंथरुणात असल्यामुळे की काय, नेहमीच काही ना काही तरी विचार करण्यात तो गुंतलेला होता. विचार करत राहण्याची ही त्याची सवय आयुष्यभर टिकली. देकार्तचे वडीलसुद्धा त्याच्या अशक्तपणामुळे अभ्यास करण्याची सक्ती करत नव्हते. आठव्या वर्षी तो एका मिशनरी शाळेत जाऊ लागला. तिथल्या फादर मुख्याध्यापकानेसुद्धा त्याची अशक्त प्रकृती बघून जेसुइट शाळेच्या शिस्तीतून त्याला वगळून जेव्हा हवे तेव्हा वर्गात येण्याची मुभा दिली. त्या काळी शाळा म्हणजे लॅटिन व ग्रीक भाषा शिकणे एवढ्यापुरतेच मर्यादित होते. देकार्तला लवकरच या गोष्टींचा कंटाळा आला. वयाच्या सतराव्या वर्षी त्याने शाळा सोडली. युरोपमध्ये त्याकाळी अराजकतेचीच स्थिती होती. मध्ययुगीन विचार व धर्माचा पगडा अशा वातावरणात देकार्तला आयुष्य नीरस वाटत असल्यास आश्चर्य वाटण्याचे कारण नाही. जीवन म्हणजे काय, विश्व म्हणजे काय, अशा गोष्टी पुस्तक वाचून कळणार नाही याची त्याला जाणीव होऊ लागली. तत्वज्ञान आणि धर्म असे

विषय शब्दाचे बुडबुडे आहेत व त्यांच्यात तसूभरही तर्कशुद्धता नाही असे त्याला वाटू लागले. दैनंदिन जीवनात त्यांचा काडीइतकाही उपयोग नाही याची खात्री पटल्यामुळे गणित शिकावं असं त्याच्या मनात आलं. गणितात शब्दांचा अवडंबर नसतो; जे काही सांगायचे आहे ते थोडक्यात – सूत्ररूपात - मांडता येते, यामुळे त्याला गणिताचा अभ्यास करावासा वाटला. एवढेच नव्हे तर विश्वाचा अभ्यास गणितामार्फत योग्य रीतीने करू शकू असे त्याला प्रकर्षाने जाणवले. त्याच्या जिज्ञासू वृत्तीला व कुतूहलाला गणितच पोषक ठरल्यामुळे तो गणिताचा अभ्यास करू लागला.

परंतु त्याच्या मनाने पुस्तकी अभ्यासापेक्षा प्रत्यक्ष जीवनाचा अनुभव घ्यावा म्हणून तेथील गाशा गुंडाळून आपल्या सरंजामी वडिलाच्या इस्टेटीवर दाखल झाला. जीवनाचा अनुभव घेण्याऐवजी देकार्त ऐष-आरामी जीवन जगत जुगार वगैरे खेळण्यात वेळ घालवायला लागला. झोकून देण्याच्या त्याच्या जन्मजात वृत्तीमुळे काही दिवसात तो अट्टल जुगारी बनला. परंतु या खेळाचा व एकूणच सरंजामी वृत्तीचा त्याला कंटाळा येऊ लागला. बाहेर अज्ञातवासात गेला. परंतु जुगारी मित्र त्याच्या मागे लागले. त्या मित्रांपासून सुटका मिळावी म्हणून तो चक्क सैन्यात दाखल झाला. सैन्यात त्याला आवडत असलेला एकांत मिळेल असे त्याला वाटत होते. सैनिकी प्रशिक्षण पूर्ण करत असताना हॉलंड येथे त्याची भेट डच गणितज्ञ व तत्वज्ञ आयझॅक बीकमनशी अचानकपणे झाली. त्यानी विचारलेले कूटप्रश्न तो चुटकीसरशी सोडवू लागला. परिचय वाढला. दोघे मिळून आपल्या आजूबाजूच्या घटना व प्रश्नांबद्दल ते चर्चा करत. त्या दोघांनाही ऑप्टिक्स, ॲस्ट्रॉनॉमी, मेकॅनिक्स, हैड्रोस्टॅटिक्स अशा विविध शाखातील प्रश्नांना गणितातून उत्तरं मिळतील असे वाटून त्याचा अभ्यास ते करू लागले. आपल्या या अभ्यासाला ‘फिजिओ मॅथेमॅटिका’ असे नाव दिले. यालाच नंतरच्या काळात ‘मॅथेमॅटिकल फिजिक्स’ या नावाने जग ओळखू

लागले. दोघानी मिळून अणूंच्या अस्तित्वाबद्दल पुस्तक लिहिले. सर्वात प्रथम अणूची कल्पना मांडणाऱ्या प्राचीन ग्रीक तत्वज्ञ डेमॉक्रिटसच्या आदरार्थ पुस्तकाचे नाव 'डेमॉक्रिटिका' असे दिले. हे सर्व करत असताना त्याच्या मनात बीजभूमितीबद्दलचे विचार सतत चालत होते. बीजगणितातील समीकरणं व भूमितीतील रेखाकृती यांच्यांतील परस्पर संबंधांच्या या गणितीय शाखेला 'बीजभूमिती' म्हटले जाते.

सैनिकी पेशामुळे त्याला जर्मनी, हॉलंड, बव्हेरिया इत्यादी ठिकाणी रहावे लागत होते. काही वेळा त्याला हवी तशी विश्रांतीही मिळत होती. मात्र त्याच्या डोक्यात बीजभूमितीचे विचार कायमचे घोळत होते. त्याच्या मनातल्या संकल्पना पूर्णत्वाला येण्यासाठी तब्बल अठरा वर्षे लागली. आपल्याला जर विश्वाचे सत्य जाणून घ्यायचे असल्यास जुने विचार पूर्णपणे टाकून देऊन स्वतःच्या कल्पना निर्माण करावे लागतील या निष्कर्षाप्रत तो या अठरा वर्षाच्या काळात पोचला. या मधल्या काळात युरोपमधील लढायांना थोडी फार विश्रांती मिळाली. काही काळ तो वडिलांकडे राहून नंतर पॅरिसला पोचला.

17व्या शतकाच्या उत्तरार्धात गणिताच्या दृष्टीने फ्रान्स जगातील मध्यवर्ती केंद्र होते. 2000 वर्षापूर्वीच्या प्लेटोच्या काळानंतर पहिल्यांदाच फ्रान्समध्ये गणितज्ञांच्यात एवढी चर्चा होत असताना दिसत होती. देकार्तच्या काळी युक्लिडच्या भूमितीचा प्रभाव इतका होता की यानंतर भूमितीत वा गणितातच करण्यासारखे काही नाही असेच गणितज्ञांना वाटत होते. पॅरिसला आलेल्या रेने देकार्तला त्याच्या आवडत्या इतर विषयापेक्षा गणितातच प्राविण्य मिळवावे असे त्याला वाटू लागले.

देकार्त फ्रान्सच्या बौद्धिक वातावरणात वाढलेला व तोपर्यंत कुणीही न विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तर शोधणारा प्रतिभाशाली तत्वज्ञ होता. सिद्धांत,

प्रयोग, निरीक्षण या त्याच्यातील वैज्ञानिक दृष्टिकोनामुळे परंपरागत तथाकथित विज्ञानाला तो आव्हान देत होता. रेने देकार्तचा भर तर्कावर होता. त्याचे Discourse on the Method of Rightly Conducting One's Reason and of Seeking Truth in the Sciences, तत्वज्ञानावरील हा ग्रंथ त्याच्या प्रतिभेची साक्ष आहे. गणितीय वैचारिकतेतील मैलाचा दगड ठरलेल्या बीजभूमितीची मुळं त्याच्या याच पुस्तकात सापडतील. देकार्त हा त्या कालखंडातील अती महत्वाचा गणितज्ञ, तत्वज्ञ व वैज्ञानिक होता.

देकार्तच्या डिस्कोर्स ऑन दि मेथड.... या पुस्तकातील 'ला जिओमेट्री' परिशिष्टामध्ये त्यानी बीजभूमिती या संकल्पनेची मांडणी केली. बीजभूमिती म्हणजे ढोबळमानाने भूमितीतल्या कूटप्रश्नांची उत्तरं बीजगणिताच्या साहाय्याने शोधणे. त्याच्या या संकल्पनेला ॲनालिटिक वा (लॅटिन भाषेतील स्वतःच्या नावावरून ठेवलेल्या) कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टिम असेही म्हटले जाते. या नवीन भूमितीत दोन एकमेकांशी लंब असलेल्या रेषांपासूनचे कुठल्याही बिंदूचे अंतर मोजून त्या बिंदूचे स्थान निश्चित करता येते. या दोन लंब रेषांना 'अक्ष' (axis) म्हटले जाते. यातील आडव्या अक्षाला 'क्ष-अक्ष' व उभ्या अक्षाला 'य-अक्ष' असे ढोबळमानाने म्हटले जाते. यावरून प्रतलावरील (plane) कुठल्याही बिंदूच्या निश्चितीसाठी निर्देशांकाची एक जोडी पुरेशी ठरते. प्रतलावरील आकृत्या असंख्य बिंदू जोडून केलेल्या असतात. व बिंदूंचे स्थान निश्चित करण्यासाठी निर्देशांकांचा वापर केल्यास आकृतीचे (बीजगणीतीय) सूत्ररूपात मांडणी करता येऊ शकते. तद्विरुद्ध बीजगणितातील समीकरणांचे दृश्यस्वरूपातील आकृतीवरून भूमितीय स्वरूप कळू शकते. देकार्तने अशा प्रकारे बीजगणीत व भूमिती यांची सांधेजोड करणाऱ्या एका कोषाचीच रचना केली.

बीजभूमितीमुळे गणिताच्या अभ्यासकांच्या हाती भूमितीतील कूटप्रश्नं सोडविण्यासाठी एक अद्भुत साधन मिळाले. तोपर्यंत गणिताचे अभ्यासक 2000 वर्षापूर्वीच्या युक्लिडने घालून दिलेल्या पद्धतीनेच कूटप्रश्न सोडविण्याचा प्रयत्न करत होते. युक्लिडने आखून दिलेल्या पद्धतीत कंपास व फूटपट्टी (ruler) यांचा वापर करून उत्तरं शोधण्यावर भर दिला जात होता. ही पद्धत अत्यंत क्लिष्ट, वेळखाऊ व कंटाळवाणी होती. बरेच डोकेफोड करावे लागत होते. त्यासाठी पानंच्या पानं लिहावे लागत असे. तासनतास बिछान्यात पडून वेळ घालविणाऱ्या आळशी देकार्तला लिहिण्याच्या आळसापायीच ही कल्पना सुचली असेल. काहीही असले तरी देकार्तची निर्देशांकाची ही भन्नाट कल्पना युगप्रवर्तक ठरली.

देकार्तची वैश्लेषिक भूमितीच्या पद्धतीमुळे भूमितीय समस्यांचे उत्तरं शोधण्यासाठी बीजगणितीय सूत्रं वापरता येऊ लागले. त्याची ही पद्धत जास्त व्यावहारिक होती. एखादी सरळ रेषा काढण्यासाठी $ax + by = c$ (such as $2x + 3y = 0$) या प्रथम घातांक बहुपदी समीकरणातील x व y या निर्देशांकांचा वापर करता येईल. वर्तुळ, दीर्घवर्तुळ (ellipse), अपास्त (hyperbola) वा अन्वस्त (parabola) सारख्या वक्र आकृतींसाठी द्वितीय घातांक बहुपदी समीकरणांचा वापर करता येईल. उदाः r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या परिघासाठी $x^2 + y^2 = r^2$; हायपरबोलासाठी $xy = 1$; पॅराबोलासाठी $y^2 = 4ax$ वा $y = x^2-x-2$ इ. इ.

देकार्त यानी भूमितीतले कूटप्रश्न सोडविण्यासाठी ज्याप्रकारे बीजगणितचा वापर केला त्याचप्रमाणे बीजगणितातील समीकरण सोडविण्यासाठी भूमितीचा वापर करता येईल, हे दाखवून दिले.

देकार्तचे समकालीन असलेल्या पियरे दि फेर्मा व पास्कल यांच्यापैकी देकार्तचे फेर्माबरोबर घनिष्ठ मैत्री होती. खरे पाहता विश्लेषक भूमितीत फेर्मा

याचेसुद्धा मोठ्या प्रमाणात योगदान होते. फेर्मा यानी वक्र रेषेचे स्पर्षक (tangent) काढण्याची एक पद्धत शोधली होती. देकार्तच्या मते ती योग्य पद्धत नव्हती; म्हणून त्यानी त्याला आव्हान दिले. त्याकाळी अभ्यासकं अशा प्रकारे आव्हान देऊनच एकमेकावरील दाव्यांची भांडण मिटवत होते. देकार्त यानी $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ या समीकरणातून तयार झालेल्या वक्र रेषेचे स्पर्शक शोधण्याचे आव्हान फेर्माला दिले होते. त्या समीकरणाला आता ‘फोलियम ऑफ देकार्त म्हणून ओळखले जाते. फेर्मा यानी ते आव्हान स्वीकारले. यशस्वीपणे स्पर्शक काढण्याची पद्धत दाखवली व देकार्तसकट सर्व गणितज्ञांकडून वाह्वा मिळवली. नंतरच्या काळात याच पद्धतीच्या आधारे न्यूटन व लेब्निझ यांनी इन्फायनिटेसिमल कॅल्क्युलसचा (infinitesimal calculus) शोध लावला.

बीजभूमितीद्वारे देकार्तने भूमितीत सुधारणा केली असे न म्हणता त्यानी त्याची नव्याने निर्मिती केली असे म्हणता येईल. परंतु देकार्त याचे योगदान फक्त गणीतातच नव्हे तर इतर ज्ञानशाखेतही होते. प्रकाशकीतील (optics) प्रणमन नियमाचा (refractive law) - दोन माध्यमांच्या सीमापृष्ठातून प्रकाश किरण तिरप्या दिशेने जातात व प्रकाशाचा वेगही बदलतो या नियमाचा - शोध देकार्तनीच लावला. भौतशास्त्रातील सरळ रेषा मार्गाने होणारी हालचाल नैसर्गिक असते हे निरीक्षण देकार्तनीच नोंदविले. त्यापूर्वी आकाशातील ग्रह ताऱ्यांच्या निरीक्षणावरून सर्व हालचाली वक्र रेषातच असतात अशी समज होती.

देकार्तला आधुनिक तत्तवज्ञानाचा जनक म्हणूनही जग ओळखते. त्याच्या मेडिटेशन्स ऑन फर्स्ट फिलॉसॉफी या ग्रंथात मन आणि ज्ञानाविषयीच्या संकल्पना यावर बेतलेल्या एपिस्टिमॉलॉजी या ज्ञानशाखेची मुळं त्यानी रोवलेली आहेत. आपल्याला फक्त आपल्या स्वतःच्या अस्तित्वाविषयी ठामपणाने सांगता येते. बाकी सगळेच अनिश्चित स्वरूपात असते, असे त्याला वाटत होते. तत्वज्ञान व भौतशास्त्रातील त्याच्या योगदानापेक्षा गणितातील त्याच्या मूलभूत संकल्पनेमुळे तो

गणितज्ञ म्हणूनच प्रसिद्धाच्या झोतात आला. गणितात क्रांती घडविणारा म्हणूनच देकार्तची गणिताच्या इतिहासात नोंद केली जाईल.

●●●

शून्याच्या शोधात...

Black holes are where God divided by zero.

– Albert Einstein

No number before zero. The numbers may go on forever, but like the cosmos, they have a beginning.

-Giuseppe Peano

इ.स. 10 व्या शतकापर्यंत शून्य ही एक संख्या असू शकते याचा विचारही कुणी केला नव्हता. ग्रीक तज्ञांनी नाही; अरिस्टॉटल, युक्लिड, अर्किमिडिस, पायथागोरस यांच्यापैकी कुणीही नाही. रोमन्सनासुद्धा हा विचार शिवला नव्हता. भारतीयांच्याही हे लक्षात आले नव्हते. या सर्वांना गणिताचा परिचय होता. परंतु संख्यांच्या स्वरूपाविषयी ते अनभिज्ञ होते. त्याकाळी कदाचित रोजच्या व्यवहारात गणिताला स्थान नसेल. ग्रीक व रोमन्स यांच्या मते ऋण (negative) संख्या असूच शकत नाही. रिक्तपणाच्या खाली काही असू शकत नाही याची पुरेपूर खात्री त्यांना होती. त्यामुळे शून्य या संख्येची त्यांना कधीच गरज भासली नाही.

विसाव्या शतकाच्या प्रारंभीच्या काळापर्यंत मानव जातीलाच वरदान ठरलेल्या शून्य संकल्पना कुठल्या देशात पहिल्यांदा मांडली गेली याबद्दल प्रचंड कुतूहल होते व त्याबद्दल संशयाचे धुके होते. 2017मध्ये मात्र इ.स. 224–383 (लोकविभाग हे जैन पुराण) , इ.स. 680–779 (आर्यभट्ट लिखित आर्यभटिया), व इ.स. 885–993 (7व्या शतकातील ब्रह्मगुप्त यांचा ब्रह्मस्फुट सिद्धांत), या कालखंडात लिहिलेल्या हस्तलिखितांचे रेडिओकार्बन डेटिंगवरून शून्य ही संकल्पना भारतातच उदयाला आली हे निर्विवादपणे सिद्ध झाले व याबद्दलच्या वादाला अखेरचा पडदा पडला. ग्रीक व रोमन यांच्या ग्रंथात न आढळलेल्या शून्यासाठीची संज्ञा भारतीय ऋषी-मुनीनी शोधली

होती व अंक म्हणून त्याचा सर्रासपणे ते वापरत होते, याला रेडिओकार्बन डेटिंगमुळे पुष्टी मिळाली.

तसे पाहता सर्व सामान्यांच्या दृष्टीने शून्य ही अगदीच क्षुल्लक वाटणारी गोष्ट. कोणत्याही गोष्टीचा अभाव, रिक्तता सूचित करणारे हे चिन्ह अथवा प्रतीक. परंतु अमूर्त स्वरूपातील हे प्रतीक तत्वज्ञ व/वा गणितज्ञ यांच्या दृष्टीने फार मोठा आवाका असलेली गोष्ट होती. शून्यामुळे जगभरातील गणिताच्या अभ्यासकांना वाटेल तेवढ्या मोठमोठ्या संख्यांचे आकडेमोड करणे शक्य झाले. परंतु भारतातील अभ्यासक त्यांच्याही पुढे गेले होते. भारतीय अभ्यासकांच्या दृष्टीने शून्य हे संख्या-पद्धतीतील फक्त स्थानदर्शक अंक नसून त्या आकड्याला एक स्वतंत्र अस्तित्वही आहे. शून्याची इतर संख्याप्रमाणे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार भागाकारासारखे आकडेमोड करता येईल, याचा शोध त्यानीच लावला. हे एका प्रकारे 4 ते 13 व्या शतकापर्यंतच्या गणित विश्वातील क्रांतीसदृश गोष्ट होती. या पूर्वी ग्रीक व रोमन गणितज्ञ भूमितीच 'सबकुछ' समजत होते. मात्र शून्याची किंमत कळल्यानंतर नंतरच्या ग्रीक वंशजांनी गणिताला भूमितीपासून मुक्त करून गणिताचा वसा पुढे नेला. व याचीच परिणती बीजगणीताच्या शोधात झाली.

इ.स. 520च्या सुमारास भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476-550) यांनी शून्यासाठी ब्राह्मी लिपीतील 'ख' या अक्षराची सोय केली. आर्यभट्ट यानी स्थान दर्शविणाऱ्या दशमान पद्धतीचे वर्णन त्याच्या संकृतमधील 121 कडवे असलेल्या आर्यभटीय या ग्रंथात केले होते. संख्येच्या एकम्, दशम् हे स्थान दर्शवण्यासाठी 'ख' या अक्षराचा वापर त्यानी केला होता. भारतीय गणितज्ञ, संख्या फक्त वस्तूंच्या मोजमापासाठीच नसून त्या अमूर्त स्वरूपातही असू शकतात यावर भर देत होते.

स्थानदर्शक दशमान पद्धतीत शून्यासकट 10 आकडे (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) असून मोठमोठ्या संख्यांचे आकडेमोड करणे यामुळे सोपे होते. तद्विरुद्ध रोमन यांची संख्यांसाठी अक्षरांचा (I, V, X, L, C, D and M, अनुक्रमे 1, 5, 10, 50, 100, 500 व 1,000) वापर केल्यामुळे आकडेमोड करणे फार कठिण असते. स्थानदर्शक शतमान पद्धतीत प्रत्येक अंकाची किंमत तिच्या स्थानावरून ठरते. दशमान पद्धतीतील पूर्णांकामध्ये उजवीकडून डावीकडील आकड्यात पहिला आकडा एकक तर नंतरचे आकडे अनुक्रमे दशक, शतक व सहस्रक ....असे 10च्या घातांकाच्या पटीत चढत जातात. (उदाः5,876 = 5,000 + 800 + 70 + 6) परंतु स्थानदर्शक नसलेल्या रोमन अंक पद्धतीत चिन्हांच्या किंमतीत बदल होत नाही. त्यामुळे 3-4 अंक असलेल्या संख्यासाठी फार मोठ्या प्रमाणात चिन्हांचा वापर करावा लागतो. 5,876 लिहिण्यासाठी MMMMMDCCCLXXVI एवढी मोठी लांबलचक अक्षरमालिकाची गरज भासते.

आताच्या उभ्या अंड्याच्या आकाराचे चिन्ह, (0), इ.स. 876 साली वापरले होते, याचा पुरावा ग्वाल्हेरजवळच्या एका शिलालेखात सापडला. त्या शिलालेखात 187x270 (पुरुष-सुमारे 2 मी) क्षेत्रफळ असलेल्या बागेतील फुलांनी रोज 50 माळा चतुर्भुज मंदिरासाठी वापरल्या जातात, असे लिहिलेले होते. 270 व 50 हे आकडे आपण जसे लिहितो, तसेच त्या शिलालेखात होते. शून्याचा (0) उल्लेख करताना थोडेसे बारीक अक्षरात लिहिलेले होते, एवढा फरक सोडल्यास बाकी वर्णन शून्याच्या स्थानाचेच होते. (संदर्भः अमीर एक्झेल यांचे In Search of Zero पुस्तक) केवळ शिलालेखात उल्लेख आहे म्हणून शून्याचा शोध भारतीयाने लावला हे काही सिद्ध होत नाही. 9व्या शतकात अरबस्तान, एशियाखंडातील इतर प्रदेश व पश्चिम युरोप यांच्याशी मोठ्या प्रमाणात व्यापार-व्यवहार होत होते, याचे अनेक पुरावे इतिहासात

सापडतात. त्यामुळे शून्याचा उल्लेख पुरातन काळी - 9व्या शतमानात होता - म्हणून भारतीयानां त्याचे श्रेय द्यावे याला काही अर्थ नाही. अशाच प्रकारच्या शून्याचा उल्लेख कांबोडियातील ख्मेर भाषेत इस 683 मधील एका हस्तलिखित/ शिलालेखात सापडला म्हणून कांबोडियात प्रथम शून्य संकल्पना उदयास आली असे म्हणता येत नाही.

परंतु त्याही पूर्वी आर्यभट्ट व ब्रह्मगुप्ता यांच्या लेखनावरून भारतातूनच शून्याचा प्रसार झाला असावा, या विधानाला पुष्टी मिळते. 1881 मध्ये सापडलेल्या बर्च झाडांच्या सालीवर लिहिलेले गणित विषयावरील बक्षाली भूर्जपत्रांच्या पानांचे कार्बन-14 डेटिंगची चाचणी 2017मध्ये केल्यांनंतर ही पाने तिसऱ्या व चौथ्या शतकातील आहेत, हे लक्षात आले. त्यावरून शून्याचा शोध भारतीयानीच केला याचा भक्कम पुरावा मिळाला. त्यामुळे शून्याचे जनक भारतीयच होते हे निर्विवादपणे सिद्ध करता आले.

7व्या शतकातील ब्रह्मगुप्ता या गणितज्ञाने शून्य हे केवळ स्थानदर्शक नसून इतर अंकाप्रमाणे ते एक स्वतंत्र अंक आहे आणि त्याचे आकडेमोड करता येते, अशी मांडणी केली. उदाः एका संख्येतून तीच संख्या वजा केल्यास त्याचे उत्तर शून्य असते; एखाद्या संख्येत शून्याची बेरीज वा वजाबाकी केल्यास ती संख्या तशीच राहते. ब्रह्मगुप्ता यानी ऋण संख्यांची संकल्पना मांडली. त्याच्या मते ऋण संख्या म्हणजे नुकसान व धन संख्या म्हणजे झालेला फायदा. नुकसानीतून शून्य वजा केल्यास नुकसान तेवढेच राहते व शून्यातून फायदा वजा केल्यास ते नुकसान होते.

भारतीय अभ्यासक शून्याच्या संकल्पनेत भर घालत राहिले. 9व्या शतकातील महावीर या गणितज्ञाने शून्याला शून्याने गुणिल्यास उत्तर शून्यच येते अशी माडणी केली. परंतु एखाद्या संख्येला शून्याने भागिल्यास संख्या बदलत नाही अशी चुकीची मांडणी केली. 12व्या शतकात भास्कराचार्य II

या गणितज्ञाने ही चूक सुधारून उत्तर अव्यक्त (indeterminate quantity) असते अशी मांडणी केली. आजही आपण शाळेत शिकत असलेल्या बहुपदी द्विघात समीकरणाची ($ax^2 + bx + c = 0$) मांडणी याच भास्कराचार्य II यानी 12व्या शतकात केली होती.

पश्चिमेतील शास्त्रज्ञांना या गोष्टी समजून घेण्यासाठी पुढील काही शतके लागली. भारतीय गणिताचा प्रवास अरबस्तानातून युरोपात गेला. संस्कृतमधील ग्रंथांचा अरेबिकमध्ये व अरेबिकमधून इंग्रजीत अनुवाद होत होत शून्य ते सिफर ते झिरो हे ज्ञान युरोपमधील तज्ञापर्यंत पोचले. 8 व्या शतकात भारतीय संख्यापद्धती अरब जगात पोचली. अरेबिक सिफरचे इंग्रजीतील झिरो नामकरण फिबोनाकी या गणितज्ञाचे. ऋण संख्यांचा दरवाजा शून्याजवळ आहे व कर्जाची वा अक्कलखाती जमा झालेल्या रकमेची नोंद शून्याच्या डाव्या बाजूला मांडता येते हे त्यांना फार उशीरा कळाले.

अल् ख्वारिझ्मी (इ.स.780 – इ.स. 850) या गणितज्ञाने सिफरला संख्या पद्धतीत सामावून घेतले. नवीनच उदयास आलेल्या बीजगणितातील समीकरणांसाठी याची नितांत गरज आहे हे त्यानी ओळखले. मध्य युगातसुद्धा आर्यभट्ट (6वे शतमान), ब्रह्मगुप्त (7वे शतमान), महावीर (9वे शतमान) व भास्कराचार्य II (13वे शतमान) या भारतीय गणितज्ञांनी केलेली कामगिरी नक्कीच कौतुकास्पद ठरली.

19व्या शतकात गणिताच्या मागील तर्कशास्त्राचा (Logic of Mathematics) अभ्यास करण्यात आला होता. त्यावेळी गिसेपे पीनो (Giuseppe Peano) या इटालियन गणितज्ञाने अंकगणितातील संख्यासंबंधींच्या गृहितकांचे नियमन करत असताना शून्य ही संख्या आहे असे ठामपणे प्रतिपादन केले. शून्याशिवाय भूमापन करणे वा ऋण – धन या संख्येतील फरक समजून घेणे जड ठरले असते, यावर त्याचा भर होता.

शून्याचे ‘स्थळ महात्म्य’ गणितज्ञांच्या लक्षात येऊ लागले. आणि संपूर्ण (गणितीय) जग शून्याच्या प्रेमात पडले. परंतु शून्याची महती सेट सिद्धांताच्या वेळी लक्षात आली. 1874 मधील एका संशोधन प्रबंधातून सेट सिद्धांताची कल्पना जिऑर्ग कँटर (1845 -1918) या गणितज्ञाने पहिल्यांदा मांडली. सेट सिद्धांत हा गणिताचा पाया समजला जातो. सेट म्हणजे एक अमूर्त भांडं वा पात्र. या भांड्यात काहीही ठेवता येते. हिमगौरी व सात बुटके या परीकथेतील सात बुटक्यापासून आठवड्यातील सात दिवसापर्यंत काहीही. फक्त सेटची मांडणीचा संदर्भ देत असताना त्यातील घटकांचे स्वरूप काय आहे हे माहित असायला हवे. त्या सेटमध्ये सात दिवस वा बारा महिने किंवा धृतराष्ट्राची शंभर मुलं असू शकतील. त्याचप्रमाणे रिक्त सेटची मांडणी केल्यास त्यात शून्य घटक आहेत हे नक्कीच लक्षात येईल.

●●●

युक्लिडची अजरामर कृती: एलिमेंट्स

No employment can be managed without arithmetic, no mechanical invention without geometry.

Benjamin Franklin

जगभरातील इतिहासाचा अभ्यास केल्यास धर्म व विज्ञान या विषयावरील पुस्तकांचा खप सर्वात जास्त आहे, हे लक्षात येईल. बायबल या धर्मग्रंथाच्या पाठोपाठ इ.स.पू 300 साली ग्रीक गणितज्ञ, युक्लिड (इ.स.पू. 330-275) यानी लिहिलेल्या एलिमेंट्स या ग्रंथाचे आजपर्यंत हजारो आवृत्त्या छापले गेले असतील. 13 खंड असलेल्या या पाठ्यपुस्तकात भूमिती व अंकगणित या विषयावरील 300 वर्षाच्या विचारमंथनांचे संकलन युक्लिडने केले होते. कोपर्निकस (1473-1543), गॅलिलिओ 1564-1642), केप्लर (1571-1630) व न्यूटन (1642-1727) यांनी मांडलेले सिद्धांत या पाठ्यपुस्तकांच्या अभ्यासावरच बेतलेले आहेत. एवढ्या वर्षानंतरसुद्धा यातील विचारांची जादू ओसरली नसून फक्त गणितशास्त्रासाठीच नव्हे तर भौतशास्त्र, खगोलशास्त्र इत्यादींच्यासाठीसुद्धा संदर्भग्रंथ म्हणून याची उपयुक्तता आजही टिकून आहे.

टॉलेमी I (इ.स.पू 367 – 283) या इजिप्तच्या राजाच्या आधिपत्याखाली असलेले ग्रीसमध्ये विद्येचं माहेरघर समजलेल्या अलेक्झांड्रिया शहरात युक्लिड रहात होता. त्या काळी या शहराची प्रसिद्धी बुद्धीवंताचे शहर म्हणून होते. जगभरातील काना-कोपऱ्यातून अभ्यासक येथे येत असत. येथील समृद्ध ग्रंथालय व वस्तु संग्रहालय अभ्यासकांचे ठिकाण म्हणून ओळखले जात होते. युक्लिड यानी येथेच स्वतःच्या अकॅडेमीची स्थापना केली व येथेच त्यानी एलिमेंट्सचे तेरा खंडांचे लेखन केले. पायथॅगोरस, प्लेटो, थेल्स वगैरेंच्या संशोधनातील त्रुटी दुरुस्त करून आणि त्यात स्वतःचे संशोधन मिळवून युक्लीडने 'एलिमेंट्स ऑफ जॉमेट्री' हा भूमितीवरचा जगप्रसिद्ध ग्रंथ लिहून

तेरा भागात प्रकाशित केला. जरी त्यांनी लिहिलेली मूळ प्रत आज जरी उपलब्ध नसली तरी नंतरच्या काळातील ग्रीक, लॅटिन व अरब प्रती जतन केलेले आहेत.

युक्लिडचे शिक्षण प्लेटो (इ.स.पू. 429?–347)या ग्रीक तत्वज्ञाच्या अकॅडेमीत झाले होते. त्याच्यावर प्लेटोचा प्रभाव होता. लहानपणापासून जिथे जिथे मोकळी जागा सापडेल तेथे युक्लिड आकृत्या काढायचा. लहानपणीच आई-वडील वारल्यामुळे चेटकीण असे समजले गेलेल्या पेट्रिका नावाच्या बाईने त्याला सांभाळले. युक्लिडचे आकृत्या काढण्याचे वेड व पेट्रिकाची बदनामी यामुळे युक्लिड ‘सैतानाचा उपासक असून भूमिती नावाच्या गूढ भाषेत सैतानाला गुप्त संदेश पाठवत असल्यामुळे दुष्काळ व दारिद्र्याचे आगमन झाले’ असे त्याचे शेजारी-पाजारी तक्रार करत असत. काही काळांनंतर युक्लिडवरचे किटाळ दूर झाले व नंतर त्यानी स्वतःची अकॅडेमी काढून तो शिकवू लागला.

युक्लिड हसत खेळत भूमिती शिकवत असल्यामुळे तो विद्यार्थ्यांचा अत्यंत लाडका शिक्षक होता. ॲरिस्टॉटलपासून प्रेरणा घेऊन युक्लीडने गणितात अलौकिक संशोधन केले. प्लेटोच्या प्रभावामुळे प्लेटोविषयक (चार, आठ, बारा व वीस सपाट समभुज त्रिकोणाकृती पृष्ठांच्या) नियमित घनाकृतीबद्दल तो जास्त विचार करत होता.

त्या काळच्या ग्रीक गणितातील धागे-दोरे पकडून युक्लिडने त्यांची एक शिस्तबद्ध रचना करून त्यात एक सुसूत्रता आणली. मूठभर कल्पनेतून त्यानी मोठ्या प्रमाणात निष्कर्ष काढले. गणितीय तर्क नेमके काय असू शकतो याची मांडणी केली. त्यानी या पूर्वीच्या व्यावहारिक असलेल्या तरीसुद्धा विस्कळित वाटणाऱ्या कल्पनांना निगम पद्धतीतील नियम वापरून (deductive rules) त्यांना सिद्धांताचे स्वरूप दिले. स्वयंसिद्धकं व गृहितकं वापरून त्यांना एका

चौकटीत बसविले. एलिमेंट्स मध्ये 131 व्याख्या, 5 गृहितकं 5 सर्वसामान्य अधिकल्पना (common notions) व 465 प्रमेय आहेत. त्याच्या 13 खंडापैकी 8 खंड प्रतल (plane) व अवकाश यातील भूमिती व उरलेल्या खंडात समानुपाती सिद्धांत (theory of proportion), अंकगणित, व अपरिमेय सिद्धांत (theory of incommensurability) यासंबंधी आहेत. अपरिमेय सिद्धांतातूनच अपरिमेय संख्यांना महत्व प्राप्त झाले.

मुळात एलिमेंट्स हे काही आताच्या स्वरूपात दिसणाऱ्या बांधीव ग्रंथासारखे नव्हतेच. त्या 13 भूर्जपत्राच्या गुंडाळ्या होत्या. सुरुवातीची भूर्जपत्रे काळाच्या ओघात नाहिश्या झाल्या व त्या नोंदींची पुस्तकस्वरूपात जतन करण्यात आल्या. या जतन केलेल्या एलिमेंट्सच्या नोंदीवरून युक्लिडने अजून एक ‘कोनिक्स’ नावाचे पुस्तक लिहिले होते, हे कळते. परंतु आज त्याचा मागमूसही नाही. एलिमेंट्समध्ये बिंदू, सरळ रेषा, वर्तुळ, काटकोन, पृष्ठभाग (surface), प्रतल इत्यांदींच्या व्यांख्या आहेत. गृहितकात दोन बिंदू एक सरळ रेषा निश्चित करतात; सरळ रेषा दोन्ही बाजूल हवी तेवढी वाढवता येते ; केंद्रबिंदू व त्रिज्या यावरून वर्तुळ काढता येते; सर्व काटकोन सारखेच असतात; दोन समांतर रेषांना छेदणारी तिसरी रेषा जिथे छेदते तिथले कोन काटकोन असतात व तसे नसल्यास रेषा समांतर नाहीत (याला पाचवा पॉस्च्युलेट म्हणतात.) अशा प्रकारची सोपी व सरळ पॉस्च्युलेट्सची मांडणी त्यानी केलेली आहे. एलिमेंट्समधील कॉमन नोशन्सही साधे, सोपे व सरळ आहेत. कुठल्याही प्रकारच्या गुंतागुंतींच्या साधनांचा वापर न करता केवळ कंपास व अंतराच्या खुणा नसलेल्या सरळपट्टीच्या सहायाने त्यानी वर्णन केलेल्या आकृती काढता येतात.

युक्लिडने प्रतल भूमितीतील मांडलेल्या गृहितकांनी गेली अनेक शतके गणितज्ञांना भरपूर बौद्धिक खाद्य दिले. पहिल्या चार गृहितकावर आधारित

आकृत्या अगदी सोप्या आहेत. बिंदूंना जोडून रेषा काढणे वा दोन काटकोनामधील समानता सिद्ध करणे यासाठी विशेष काही करावे लागत नाही. पाचव्या पॉस्च्युलेटने मात्र नंतरच्या काळातील गणिताच्या अभ्यासकांची झोप उडवली. तरीसुद्धा पाचही पॉस्च्युलेट्स पूर्ण करणाऱ्या प्रतलावरील भूमितीला युक्लिडियन प्लेन म्हणण्याचा प्रघात आहे. व त्यालाच युक्लेडियन भूमिती म्हणून संबोधले जाते.

काही गणितज्ञांना प्रतलाच्या भौमितीय गुणधर्माबद्दलच्या पाचव्या पॉस्च्युलेटची युक्लिडने केलेली मांडणी वादग्रस्त आहे असे वाटत होते. काही अभ्यासकांच्या मते हे जटिल विधान सोपेकरून सांगता आले असते. विधान सोपे करताना त्याला आणखी फांदे फुटले. उदाः ‘‘एखाद्या ऱेषेच्या बाहेर असलेल्या बिंदूतून रेषेला समांतर रेषा काढता येते’’ वा ‘‘त्रिकोनातील तिन्ही कोनाची बेरीज 180 अंश असते’’ अशा प्रकारची विधानं करून भर घालता येते. असे काहीही केले तरीही ती युक्लिडियन भूमितीच ठरते.

19व्या शतमानाच्या सुरुवातीला जानोस बोलाय (János Bolyai (1802-1860)), निकोलाय लोबाचेव्ह्स्की (Nikolai Lobachevsky (1792-1856)) व कार्ल गाऊस या गणितज्ञांनी युक्लिडियन भूमितीतील पाचव्या पॉस्च्युलेटला वेगळे वळण देत नॉन-युक्लिडियन भूमितीचा पाया रचला. ही काल्पनिक भूमिती हायपरबोलिक भूमिती (hyperbolic geometry) या नावाने ओळखली जाते. पाचव्या पॉस्च्युलेटची जागा या भूमितीने घेतली. या भूमितीत त्रिकोनातील तिन्ही कोनांची बेरीज180 अंशा पेक्षा कमी असते. हे विधान योग्य वाटत नसले तरी गणितीय तर्कदृष्ट्या बरोबर ठरते. लोबाचेव्ह्स्कीच्या या भूमितीला सुरुवातीला मोठ्या प्रमाणात आक्षेप घेण्यात आले. नंतर मात्र निसर्गातील या संबंधीच्या घडामोडींचा अभ्यास केल्यावर हायपरबोलिक भूमितीला मान्यता मिळाली.

गणित विषयात तर्कशुद्धतेला फार महत्व आहे. युक्लिडची भूमिती पूर्णपणे तर्काला धरून केलेली मांडणी आहे. त्यामुळे युक्लिडला तर्कशास्त्राचा जनक असेही म्हटले जाते. युक्लिड फक्त भूमितीचा नव्हे तर अंकगणिताचाही अभ्यासक होता. एलिमेंट्समध्ये अंकगणिताशी संबंधित काही प्रमेय आहेत. एक (1) या अंकाबद्दल लिहिताना युक्लिडने या एककात जगातल्या सगळ्या गोष्टी साकार होतात, असे उद्गार काढले आहेत. युक्लिडने थिअरम ऑफ प्राईम नंबर्सचा प्रमेय वापरून या संख्या अगणित असतात असे लिहिले आहे.

युक्लिड हा जगातला महान गणिती कोषकार होता हे त्याच्या 'एलिमेंट्स'च्या तेरा खंडावरून नक्कीच लक्षात येईल. युक्लिड हा नुसत्या ग्रीकांचाच नव्हे तर, संपूर्ण जगाच्या गणितावर प्रभाव टाकलेला महान गणिती होता!

●●●